EJERCICIOS DE REFUERZO

FRACCIONES, POTENCIAS Y RAICES

1.- Simplificar: $\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}$ $\qquad$ $\dfrac{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\div\frac{1}{3}}$

2.- Calcula las siguientes expresiones (acuérdate de la prioridad en las operaciones)

a) $\frac{3}{3}\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{11}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)$ $\qquad$ b) $\frac{5}{9}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)$

c) $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}:\frac{3}{7}$

d) $3-4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+3:\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{2}\right)\right]$

e) $(3-4)\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(3:\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}\right]$

f) $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+5-3\left(4:\frac{3}{5}+1\right)$

g) $\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+5\right]-3\left[4:\left(\frac{3}{5}+1\right)\right]$

3.- Desarrolla las siguientes expresiones

a) $(a+b)^2$ $\qquad$ b) $(a-b)^2$ $\qquad$ c) $(a+b)(a-b)$ $\qquad$ d) $(a-b)^3$; $\quad(a+b)^3$ $\qquad$ e) $(\sqrt{3}-1)^2$

4.- Calcula: $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-3}$ $\qquad$ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$ $\qquad$ $\left(-\frac{2}{7}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^3$ $\qquad$ $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^7:\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^2$

5.- Simplificar: a) $\dfrac{12^3\cdot 21^{-4}\cdot 3^5}{2^7\cdot 32\cdot 7^{1/2}}$ b) $\dfrac{(a^{-2}\cdot b^{-3}\cdot b)^2}{a\cdot b^{-2}\cdot a^3\cdot a^{-4}}$ c) $\dfrac{2^3\cdot 2^7\cdot 2^{-3}\cdot 2^5}{2^4\cdot 2^6\cdot 2^{-2}\cdot 2^9}$ d) $\dfrac{2^3\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 11}{2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 13}$

6.- Efectuar las siguientes operaciones:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$

b) $(\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{7})$

c) $\dfrac{\sqrt{50}}{5}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{\sqrt{72}}{4}$ $\qquad$ d) $\dfrac{\sqrt{27}}{3}+\dfrac{2}{5}\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{108}}{6}$ $\qquad$ e) $\sqrt{18}-\dfrac{\sqrt{72}}{2}+\dfrac{\sqrt{162}}{3}$

f) $\sqrt{24}-\sqrt{150}-\sqrt{32}+\sqrt{216}-\sqrt{200}$

g) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$

h) $(\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{7})$

i) $\dfrac{\sqrt{50}}{5}-\dfrac{\sqrt{18}}{3}+\dfrac{\sqrt{72}}{4}$ $\qquad$ j) $\dfrac{\sqrt{27}}{3}+\dfrac{2}{5}\sqrt{75}-\dfrac{\sqrt{108}}{6}$

7.- Calcular y extraer factores fuera del radical:

a) $\sqrt{a^2 \cdot b} \cdot \sqrt{2 \cdot a \cdot b}\ \sqrt{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{5 \cdot a \cdot 4} \cdot \sqrt{2 \cdot a}}{\sqrt{3 \cdot x^2 \cdot a^4}}$

8.- Realizar los siguientes productos:

a) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} + 5\sqrt{3})$ b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})$

9.- Simplifica: $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{x^3} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot 2^4 \cdot \sqrt[3]{3^4}}$

10.- Simplifica: a) $\dfrac{(a^5)^2 \cdot (b^{-6})^3 \cdot c^3}{(a^{-3})^{-2} \cdot b^8 \cdot c^{-5}}$ b) $\dfrac{(2^3)^{-2} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}}{(2^{10})^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}$

11.- Simplifica: a) $\dfrac{\sqrt{2x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^5}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{2x^2 \cdot y^3}}{\sqrt{4 \cdot x \cdot y^6}}$ c) $\sqrt{x^3 \sqrt{\dfrac{x^2}{y}}}$ d) $\sqrt{\sqrt{x^3 \sqrt{\dfrac{x}{y}}}}$

12.- Elimina las raíces del denominador y simplifica:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ c) $\dfrac{1}{3 - \sqrt{2}}$

13.- El volumen estimado de todos los océanos de la Tierra es de 1 285 600 000 km^3 y el volumen de agua dulce estimado es de 35 000 000 km^3 . ¿que proporción representa cada cantidad de agua del total?

14.- Halla, pasando primero a notación científica, y da el resultado también en notación científica:

$$\frac{0,000012 \cdot 2120000000}{0,0031 \cdot 123000000}$$

15.- Clasifica los siguientes números según pertenezcan a los conjuntos N (Naturales), Z (Enteros), Q (Racionales) y R (Reales).

$3;\ -\dfrac{3}{4};\ \sqrt{2};\ 7{,}23;\ -2;\ \pi;\ 0;\ -4:\ \dfrac{1}{3};\ \sqrt[5]{-1};\ 1{,}231313..;\ \sqrt{-5};\ 1{,}010203...;\ 2{,}\overline{13}$

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- Dados los polinomios $P(x)=2x^3-3x^2+4x-7$; $Q(x)=-x^3+2x^2-2x+3$ y $R(x)=x^3+x^2-6x+2$
Calcular: $P(x)+Q(x)+R(x)$; $P(x)-Q(x)+R(x)$; $P(x)-Q(x)-R(x)$; $P(x)+Q(x)-R(x)$;

2.- Realiza las siguientes multiplicaciones:
a) $(x^2-3x+1)\cdot(x+4)$; *b)* $(5x^4+3x^3-2x^2-3x)\cdot(2x^3+2x+1)$
c) $(x^{4-}7x^2-3)\cdot(x^2-3)$; *d)* $(7a^3-3a^2-a+1)\cdot(2a^2-3a+2)$

3.- Realiza las siguientes divisiones: *a)* $(3x^3-2x^2+x-1):(x^2+x+1)$
b) $(6x^5-3x^4-2x^3-20x^2-12x+14):(3x^3-2x^3+3)$ *c)* $(3x^4-2x^2-5x+3):(x-2)$

4.- Sean $P(x)=\frac{3}{2}x^4-\frac{8}{5}x^3+\frac{9}{7}x^2+\frac{3}{5}x-1$ y $Q(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{8}{5}x+4$
Calcula $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $P(x)\cdot Q(x)$; $P(x):Q(x)$;

5.- Aplica la relación $D=d\cdot c+r$ para encontrar un polinomio que dividido entre x^2-1 dé cociente $x+3$ y resto $x-2$.

6.- Utiliza la regla de Ruffini para las siguientes divisiones: *a)* $5x^4-3x^3+6x^2-2x-6):(x-1)$
b) $(x^4+x^3+x^2+x+1):(x+1)$; *c)* $(x^5+x^4-8x^3+13x^2-6x+24):(x+4)$;
d) $(x^4+1):(x-1)$; *d)* $(6x^3-2x+x^4+15-6x^2):(x+3)$.

7.- Calcula el valor numérico del polinomio $5x^3+2x^2-3x+4$ para: a) x = 1 ; b) x = -1 c) x = 1,07
Hacerlo también aplicando el teorema del resto.

8.- Calcula sin efectuarlas, el resto de las siguientes divisiones: a) $(x^3-1):(x-1)$
b) $(x^4+2x+1):(x+1)$ c) $(3x^5-4x^3+2x^2-7x+1):(x-1)$

9.- Se sabe que al dividir $x^3-x^2+ax-10$ entre $x-2$ la división es exacta. ¿Cuánto vale a?

10.- ¿Cuánto debe valer a para que al dividir $x^3-x^2+11x+a$ entre $x-3$ la división sea exacta?

11.- Dados los polinomios: $P(x)=3x^4-5x^3+2x^2+3$ y $Q(x)=x^3-3x^2+2x-1$
Calcular: $P(x)+Q(x)$; $P(x)-Q(x)$; $P(x)\cdot Q(x)$; $P(x):Q(x)$

12.- Halla el valor numérico de $P(x)=2x^4+3x^3-2x^2+3$ para x = -1
¿Es divisible el polinomio anterior, *P(x)* entre $x-1$?

13.- Descomponer en factores el polinomio: $P(x)=2x^3-9x^2-8x+15$

14.- Se sabe que al dividir x^3-2x^2+ax-8 entre $x-1$ la división es exacta.

15.- Factoriza los polinomios: a) $x^4-x^3-13x^2+x+12$ b) $x^4+3x^3-7x^2-27x-18$
c) $x^3-12x^2+41x-30$ d) $5x^3-20x^2-20x+80$

16.- Descomponer en factores el siguiente polinomio: $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

17.- Descompón en factores: a) $x^2 - y^2$ b) $a^2 - 9b^2$ c) $x^2 + 4xy + 4y^2$
d) $x^2 - y^4$ e) $x^2 + 12x + 36$ f) $x^2 - 8x + 16$

18.- Efectúa: a) $3x^2 \cdot (5x^2 y);$ b) $3x^2 \cdot (5x^2 + y);$ c) $\frac{4a^2b^3cx^5}{2a^2b^3x^3}$; d) $\frac{4a^2b^3 + cx^5}{2a^2b^3x^3}$

19.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas :

a) $\frac{x \cdot (x-y)}{y \cdot (y-x)}$, b) $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$,

c) $\frac{2a^2 - 5a - 12}{16 - a^2}$, d) $\frac{3a - 3b}{2b^2 - 2a^2}$, e) $\frac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 + x}$ f) $\frac{b^2 + b}{a + ab}$.

20.- Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas simplificándolas al máximo:

a) $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x-2}$, b) $\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x^2-1}$, c) $x - \frac{x^2}{x-1} + \frac{x}{x+1}$, d) $\frac{3}{y-2} - \frac{5}{y^2-4}$

e) $\frac{x+1}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x-1}{x+1}$, f) $\frac{x-2}{2-x} - \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x-2}{x+2}$, g) $\dfrac{\frac{x-y}{3}}{\frac{x^2-y^2}{9}}$

.

h) $1 + \frac{x-y}{x+y}$ i) $\frac{3}{x(3-x)} \cdot \frac{3-x}{2}$ j) $\frac{2a}{a-b} : \frac{4}{a^2-b^2}$ k) $\frac{2ab^2}{3xy} : 4a^2b$

l) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2-1}$ m) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + 5x + 6}$ n) $\frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$

o) $\dfrac{1 - \frac{x+y}{x-y}}{1 + \frac{x+y}{x-y}}$

21.-Calcular: $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x-1}$

22.- Simplifica las siguientes fracciones algebraicas: $\frac{2x^3 - 9x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x + 2}$

23.- Calcula y simplifica: a) $\frac{2x+4}{x-5} - \frac{2x-14}{x+4}$ b) $\frac{2x+2}{x-1} + \frac{2x-3}{x+1} + \frac{10}{x^2-1}$

24.- Opera y simplifica: a) $\frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+4x+4}$ b) $\left(x - \frac{1}{x}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right)$

- ECUACIONES Y SISTEMAS

1.- Clasifica las siguientes ecuaciones: a) $7(x-10)=4(x-7)$ b) $x^2+9x=0$

c) $\frac{2}{x^2}-4=x^2-\frac{9}{6}$ d) $3x-\frac{7}{4x}+2=3x$ e) $\sqrt{36+x}=x+\sqrt{x}$ f) $x=3+5y$

2.- Resuelve y comprueba las siguientes ecuaciones: a) $6-\frac{5(x-4)}{4}=2-\frac{3-x}{6}$,

b) $\frac{2x}{3}-\left(\frac{x}{5}-\frac{7}{3}\right)=\frac{x}{2}-\left(\frac{3x}{5}-x-6\right)$ c) $x-\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)=\frac{2x-47}{6}-\frac{4}{3}$

d) $5+\frac{x}{3}=\frac{3-\frac{x}{2}}{4}-\frac{5}{6}+\frac{10-\frac{x}{2}}{2}$ e) $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-3}{9}=\frac{x-2}{45}$ f) $\frac{5}{x-3}=\frac{3}{x-2}$

3.- Dos hermanos mientras charlan, concluyen que entre ambos tienen 29 años, y el uno le dice al otro: dentro de ocho años mi edad será doble de la tuya. ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad?

4.- Resuelve las ecuaciones: a) $x^2 - 5 = 0$ b) $3x^2 - 147 = 0$

c) $2x^2 - 98 = 0$ d) $3x^2 - 48 = 0$

5.- Resuelve las ecuaciones : a) $3x^2 + x = 0$ b) $3x^2 - 2x = 0$

c) $x^2 - 2x = 0$ d) $2x^2 + 3x = 0$

6.- Resuelve las ecuaciones de segundo grado completas:

a) $\boldsymbol{x^2-5x+4=0}$ c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

7.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado en las que falta el término en x:

a) $x^2 - 5 = 0$ b) $3x^2 - 147 = 0$

c) $2x^2 - 98 = 0$ d) $3x^2 - 48 = 0$

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado en las que falta el término independiente:

a) $3x^2 + x = 0$ b) $3x^2 - 2x = 0$

c) $x^2 - 2x = 0$ d) $2x^2 + 3x = 0$

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado que están factorizadas:

a) $x-2 \cdot x+1 \ =0$ b) $x+1 \cdot 2x+1 \ =0$

c) $3x+1 \cdot 2x-2 \ =0$ c) $2x+2 \cdot 3x+3 \ =0$

10.- Resuelve las ecuaciones de segundo grado completas (empleando la fórmula):

a) $\boldsymbol{x^2-5x+4=0}$ b) $\boldsymbol{x^2+x-6=0}$

c) $9x^2+6x+1=0$ d) $5x^2-7x+3=0$

11.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2-3x}{2}-5=\dfrac{x-20}{4}$ (Para ello reduce a común denominador y quita los denominadores, luego pasa todo al primer miembro para igualar a cero y resolver la ecuación de segundo grado resultante)

b) $5x-4 \quad 2x+3 \ =5$ (Para ello haz el producto y pásalo todo al primer miembro para igualar a cero y resolver la ecuación de segundo grado resultante).

12.- Halla un número entero sabiendo que si lo multiplicamos por su siguiente, obtenemos el doble del número.

13.- Halla dos números consecutivos cuyo producto sea 182.

14.- La suma de un número y su cuadrado es 42. Hállalo.

15.- Halla tres números impares consecutivos tales que sus cuadrados sumen 5051.

16.- Halla dos números pares consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 452.

17.- Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado: $2\mathbf{x}+1 \ ^{2}=4+\ \mathbf{x}-2 \quad \mathbf{x}+2$

18.- Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

19.- Resuelve las siguientes ecuaciónes:

a) $\dfrac{2x+3}{x+4}=x-1$ b) $x+2=\dfrac{5}{x}$ c) $x+2=\dfrac{5+x}{x-1}$

d) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}=7$ e) $(x-3)\cdot(x+2)=1$ f) $3x-\dfrac{5}{2x}=\dfrac{7}{4x}$

g) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=1$ h) $x\cdot\left(3-\dfrac{x-5}{4}\right)-2=\dfrac{x^2-2}{3}-\dfrac{x+8}{6}$

h) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{15}{4}$ i) $\dfrac{\mathbf{x}+4}{3}-\dfrac{7-\mathbf{x}}{\mathbf{x}-3}=\dfrac{4\mathbf{x}+7}{9}-1$

20.- Preguntada una persona por su edad, contesto: “Sumad 25 al producto del número de años que tenía hace 5 años por el de los que tendré dentro de 5 años y os resultara un número igual al cuadrado de la edad que tengo hoy.”

21.- Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas: $x^4-18x^2+81=0$; $x^4-26x^2+25=0$

$x^4-4x^2+3=0$; $x^4+x^2-2=0$

22.- Resolver la ecuación:

$\sqrt{x^2+4}\ -2=x$; $2x+\sqrt{6x+1}=3$; $\sqrt{3x+1}+1=x$ $x-\sqrt{3x-5}=3$;

23.- Resolver la inecuación: $\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} \geq \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3}$

24.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} + 1 \geq \frac{x}{3} \\ \frac{2x-1}{3} < 1 + \frac{x-1}{2} \end{array}\right\}$

25.- Resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 3 - 2x \geq 7x + 12 \\ 2x + 3 < 3x - 15 \end{array}\right\}$$

26.- Resolver la inecuación: $2x - \frac{3x+1}{3} \geq 2\ 3x - 2$

27.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x + 2 > 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \end{array}\right\}$

28.- Resolver la siguiente inecuación: $\frac{x-4}{3} < \frac{x^2}{x+4}$

29.- Resolver las siguientes inecuaciones: a) $x^2 + 2x - 15 \leq 0$ b) $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$
c) $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

1º BCS Repaso.

Sistemas de ecuaciones (2)

1.- Resuelve por los tres métodos los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + 5y = 13 \\ x - y = 7 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 31 \\ 4x - y = 26 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$

2.- Resuelve utilizando el método de sustitución los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = -6 \end{array}\right\}$

3.- Resuelve utilizando el método de reducción los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 7x - 3y = -8 \\ 5x - 3y = 50 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 9 \end{array}\right\}$

4.- Ejemplo de sistemas de ecuaciones con infinitas soluciones:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 5y = 4 \\ 6x + 10y = 8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 6y = 4 \\ x - 3y = 2 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{array}\right\}$

5.- Ejemplo de sistemas de ecuaciones sin solución:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 4 \\ 3x - 5y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 6y = 1 \\ x - 3y = 4 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 2 \end{array}\right\}$

6.- Resuelve : a) $\left.\begin{array}{l} x = 2(11 - y) \\ y = 5(x - 5) + 3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 24 \\ \frac{x}{5} = \frac{Y}{4} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 3x + \frac{y}{5} = 15 \\ 4y - \frac{31x}{4} = 29 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 15 \\ x - \frac{2y}{5} = 12 \end{array}\right\}$

7.- En un corral hay conejos y gallinas, que hacen un total de 61 cabezas y 196 patas. Determina el número de conejos y gallinas.

8.- Se desea mezclar vino de 55 pta. con otro de 40 pta. litro, de modo que la mezcla resulte a 45 pta. el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 300 litros de mezcla?

9.- Por la mezcla de 8 Kg. de café con 2 Kg. de achicoria se han pagado 1324 pta. Calcula el precio del kilogramo de café y del kilogramo de achicoria, sabiendo que si se mezclase 1 Kg de cada clase costaría la mezcla 182 pta.

10.- Una persona cambia monedas de una peseta por monedas de un duro sin ganar ni perder en el cambio, resultando que después del cambio tiene 60 monedas menos. Halla el dinero que tiene.

11.- Se quiere obtener un lingote de oro de 1 Kg de peso y ley de 900 milésimas, fundiendo oro de 975 milésimas y oro de 875 milésimas. ¿Que cantidad hay que fundir de cada clase?

12.- Resolver el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array}\right\}$

13.- Resolver el siguiente sistema no lineal: $\left.\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 3 \\ x^2 & - & y^2 & = & 0 \end{array}\right\}$

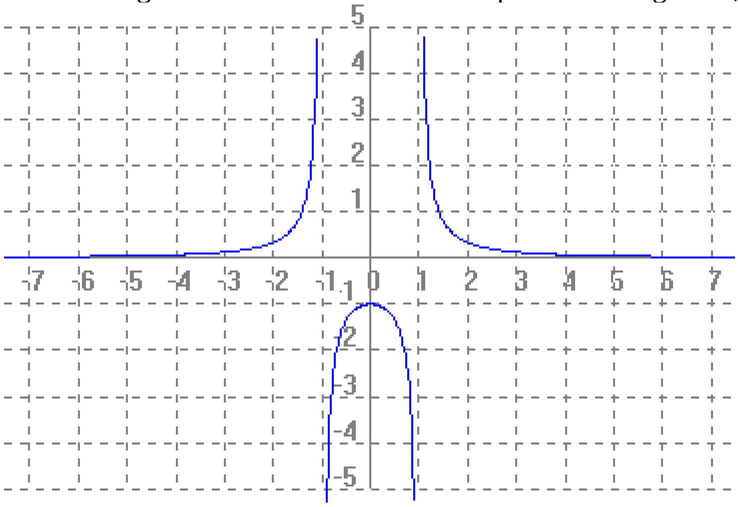
14.- Un grupo de estudiantes organiza una excursión para lo cuál alquilan un autocar cuyo precio es de 540 €. Al salir, aparecen 6 estudiantes más y esto hace que cada uno de los anteriores pague 3 € menos. Calcula el número de estudiantes que fueron a la excursión y que cantidad pagó cada uno

15.- Resolver analítica y gráficamente loe sistemas:

a) $\left.\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 14 \\ x^2 & - & 4x + y & = & 3 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{array}\right\}$

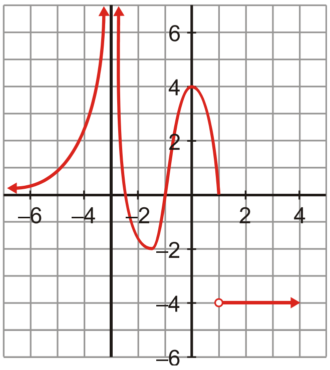
- **FUNCIONES**

1.- Dada la siguiente función mediante su representación gráfica, responde a las preguntas:



a) ¿Cuál es su dominio de definición? Y ¿su recorrido?
b) ¿Es continua? Si no lo es, indica dónde es discontinua
ç ¿Cuáles son sus máximos y mínimos relativos?
d) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?
e) ¿Cómo se comporta la función cuando $x \longrightarrow \infty$ y ¿cuando $x \longrightarrow -\infty$?

2.- Dada la siguiente función mediante su representación gráfica, responde a las preguntas:



¿Cuál es su dominio de definición?

¿Es continua? Si no lo es, indica dónde es discontinua

¿Cuáles son sus máximos y mínimos relativos?

¿Cuáles son los puntos de corte

Como se comporta la función cuando $x \longrightarrow \infty$ y
¿cuando $x \longrightarrow -\infty$?

3.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

4.- Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = x^3 - 2x^2 + 3}$ ***b)*** $\boldsymbol{y = \dfrac{3x - 2}{x^2 - 5x + 4}}$ ***c)*** $\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}}$ ***d)*** $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x}}$

5.- Hallar el Dominio de las siguientes funciones:

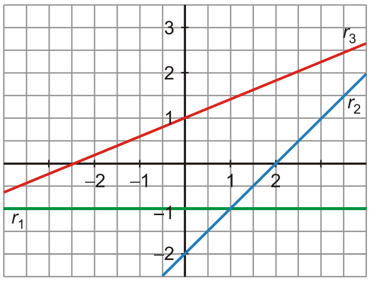
a) $y = x^3 - 2x^2 - 1$ b) $y = \sqrt{1 - x^2}$ c) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$

6.- Representa las rectas siguientes:

a) $y = -2x + 2$ b) $y = \frac{7}{3}$ c) $y = \frac{5}{3}x$ d) $y = -2x + 3$

¿Qué relación hay entre las rectas ạ y ç?

7.- Observando las gráficas, indica cuál es la ordenada en el origen de las siguientes rectas y halla la ecuación de cada una de ellas:



8.- Representa las rectas siguientes:

a) $y = -3{,}5x + 1$ b) $y = \frac{5}{4}$ c) $y = -\frac{7}{2}x$ d) $y = -\frac{2}{3}x - 2$

¿Qué relación hay entre las rectas ạ y ç?

9.- Con una escarpia hemos instalados un muelle de 8 cm. de largo. De éste se han ido colgando pesas iguales y se ha medido en cada caso, la longitud alcanzada por el muelle según la tabla

x = Nº de pesas	0	1	2	3	5	10
y = Longitud (en cm)	8	10	12	14	18	28

a) Representar la función que da la longitud alcanzada por el muelle en función del número de pesas.
b) Calcula la ecuación que relaciona ambas variables

10.- Halla la ecuación de la recta que pasa por los $A\,\tilde{}\,(1, 3)$ y $B\,(5, 2)$.

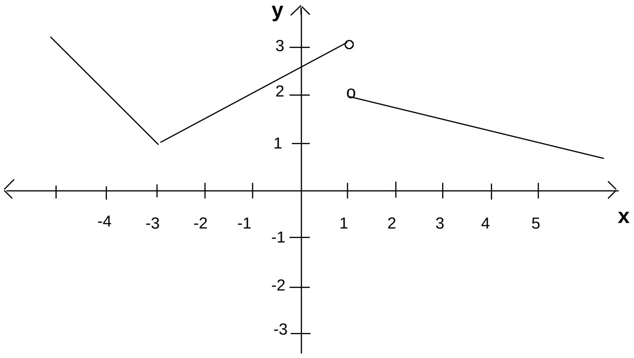
11.-Indica cual es la pendiente de la recta que pasa por los puntos: $A(0, -1)$ y $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Escribe su ecuación y la de la paralela a ella que pasa por el origen de coordenadas.

12.- Se arroja una pelota desde el suelo y la altura en metros viene dada por $y = -5t^2 + 10t$ siendo t el tiempo en segundos. Representar la función y decir:

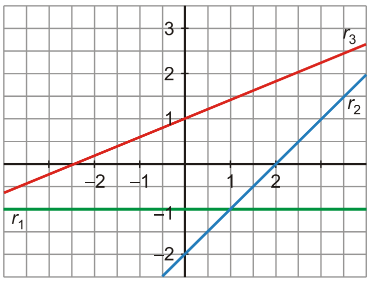
a) Cuándo alcanza su altura máxima?
b) ¿Cuál es su altura?
c) Hallar los puntos de corte con los ejes

13.- La gráfica de una función definida a trozos es:

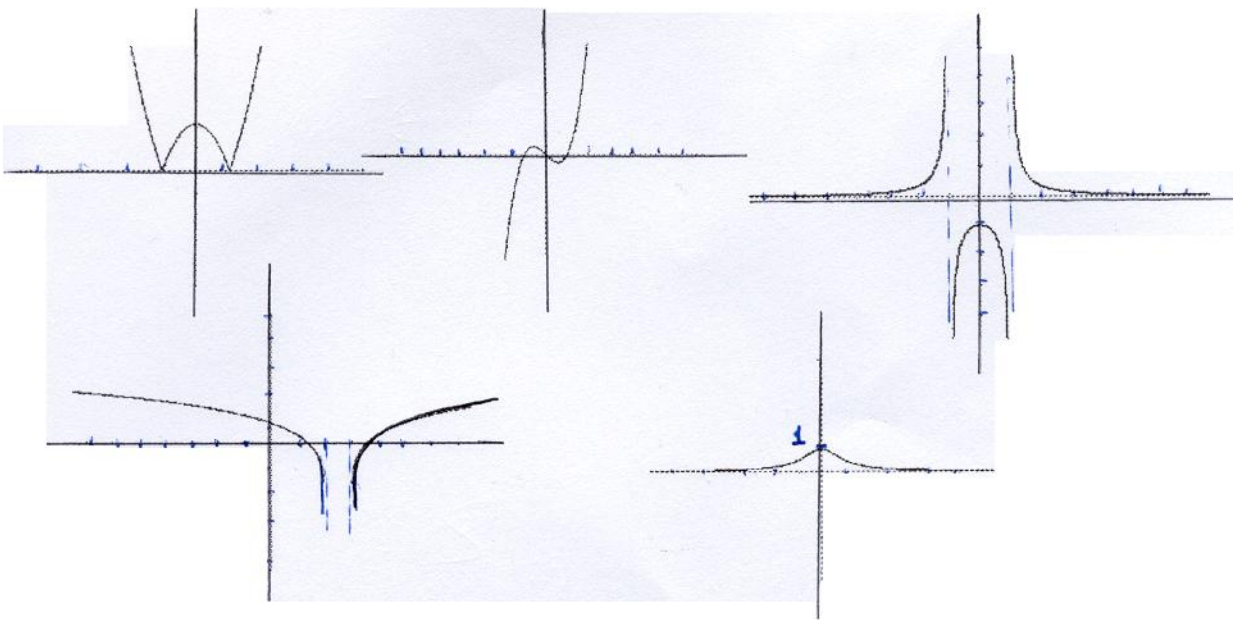


Hallar la función.

14.- Observando las gráficas, indica cuál es la ordenada en el origen de las siguientes rectas y halla la ecuación de cada una de ellas:



15.- Estudiar el Dominio y el Recorrido de las siguientes funciones

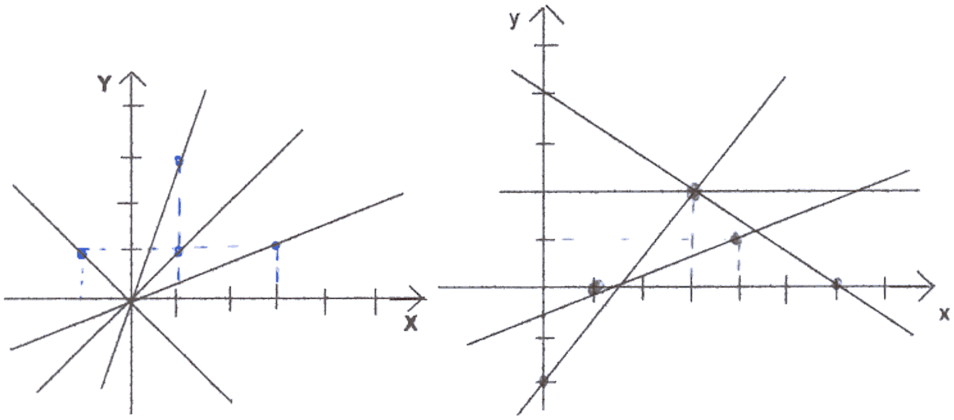


16.- En cada una de las siguientes rectas decir cual es la pendiente y cual es la ordenada en el origen:

a) $y = 3x-2$ b) $y = -2x+3$ c) $y = 4x$ d) $y = 7$ e} $y = -5x+4$

f) $-3y-2 = 9x+1O$ g) $x-2y+4 = 0$

17.- Observa la gráfica e indica cuáles son la ordenada en el origen y la pendiente en las siguientes rectas:



18.- Escribe las ecuaciones de las rectas que tienen:

Pendiente	2	2	2	½	½	5/3	-2/5	-3
Ordenada En el origen	3	0	-4	3	0	-4	1	1/3

19.- En un experimento en el que se relacionan dos magnitudes se ha obtenido el siguiente resultado:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	7	9	11	13	15	17

¿Hay alguna recta que se ajuste perfectamente a estos datos? Si la hay, escribe su ecuación y dibuja su gráfica**.**

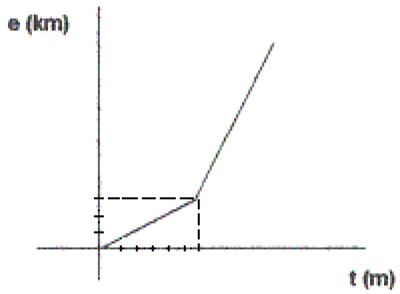
20.- Piensa en todos los rectángulos con perímetro 20 cm. Cuando la base se alarga, la altura debe disminuir. Busca la función que relaciona la base x con la altura y. Represéntala gráficamente. ¿Es una recta? Halla la formula que relaciona las dos variables.

21.- Escribe la ecuación de las rectas que:
a) Pasa por los puntos *A(-3,2) y B(3,5)*
b) Pasa por el punto *A(2,3)* y tiene pendiente 1/2

22.- Se sabe que, cada 32 metros de profundidad bajo tierra, la temperatura aumenta un grado. Si en la superficie, la temperatura es de 10º, encuentra la ecuación de una recta que los metros de profundidad con los grados.
Un agua termal que sale a 79º , ¿de qué profundidad proviene?

23.- En una agencia A, las condiciones de alquiler de un modelo de coche son: una cuota de 2000 Ptas., y 10 Ptas. por kilómetro recorrido. En otra agencia B, no se cobra la cuota inicial y el kilómetro recorrido vale 25 Ptas.
a) Escribe la función que da el coste total del alquiler de coche, dependiendo del número de kilómetros en cada una de las agencias.
b) Representarlas gráficamente.
c) ¿Cuál de las agencias recomendarlas para un viaje de 100 Km.? ¿y para uno de 500 Km.? d)¿ Para que recorrido es igual el coste en ambas agencias?

24.- La gráfica siguiente muestra el espacio recorrido dependiendo del tiempo transcurrido:



Definir la función definida a trozos.

25.- Representar gráficamente la siguientes funciones lineales a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad x < -1 \\ 1 - 2x & si \quad -1 \le x < 1 \\ 3x - 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}x + 2 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

26.- En la frutería de unos grandes almacenes encontramos la siguiente oferta: PATATAS

Hasta 5 Kg. 30 Ptas. el Kg.

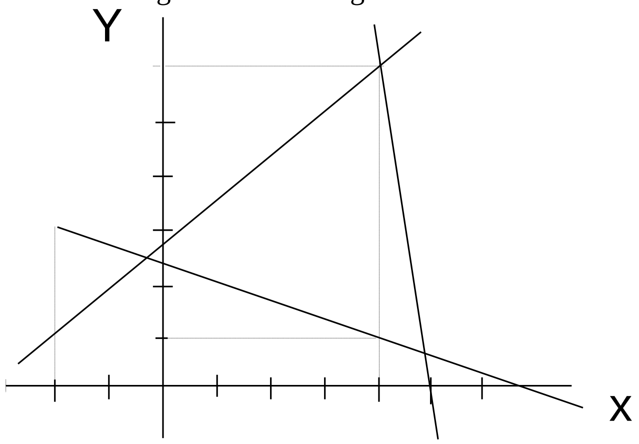
De 5 a 10 Kg. 25 Ptas. el Kg.

Más de 10 Kg. 20 Ptas. el Kg.

a) Representa gráficamente el precio a pagar en función del peso.

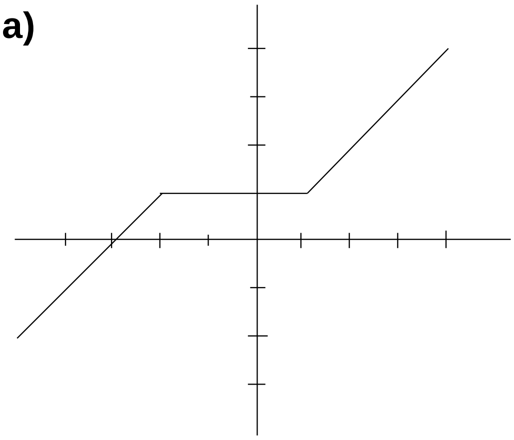
b) Busca la expresión algebraica de la función dada.

27.- Dada las gráficas de las siguientes funciones lineales, hallar su expresión analítica:

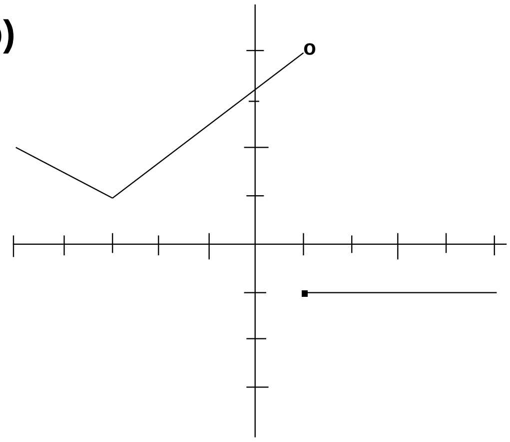


28.- Obtén razonadamente las fórmulas de las funciones afines cuyas gráficas puedes ver en la figura.

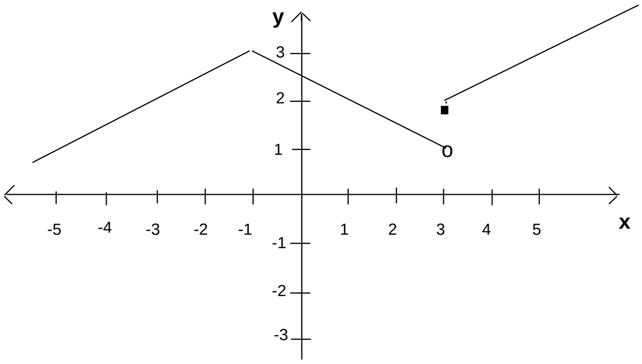
a)



b)



c)



29.- Se arroja una pelota desde el suelo y la altura en metros viene dada por $y = -5t^2 + 10t$

Siendo t el tiempo en segundos. Representar la función y decir:

$y = -5t^2 + 10t$ a) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?

b) ¿Cuál es esa altura?

c) Hallar los puntos de corte con los ejes

30.- Representa las siguientes parábolas:

a) $y = -2x^2 + 10x - 8$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$ **c)** $y = x^2 - 4$ ***d*)** $y = -x^2 + 2$

31.- Representar gráficamente de la función: $f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad x < -1 \\ 2x^2 + 1 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ -x + 11 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Decir si es continua.

32.- Representar las siguientes funciones definidas a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<0 \\ x-1 & si \quad 0<x<2 \\ x^2-2 & si \quad x>2 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} x-2 & si \quad x<0 \\ 3x-2 & si \quad 0\leq x<2 \\ -2x+8 & si \quad 2\leq x \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x<-3 \\ -2 & si \quad x=-3 \\ 1 & si \quad -3<x<0 \\ x^2-4x & si \quad x\geq 1 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<1 \\ x+1 & si \quad -1\leq x<0 \\ -x & si \quad 0<x\leq 1 \\ 0 & si \quad x>1 \end{cases}$$

33.- Hallar la cantidad final que obtendría una persona que tiene depositada en una caja de ahorros 3.000.000 de Ptas. a una tasa del 3,5% de interés compuesto anual al cabo de 6 años.

34.- La cantidad final que obtiene al cabo de unos años una persona que tiene depositada en una caja de ahorros 3.000.000 de Ptas. a una tasa del 3,5% de interés compuesto anual es de 3.687.766. Hallar los años transcurridos.

35.- Halla el valor de k y a para que la gráfica de $y = ka^x$ pase por los puntos (0, 3) y $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Representarla.

36.- Halla el valor de k y a para que la gráfica de $y = ka^x$ pase por los puntos: (0,2) y $\left(2, \frac{3}{4}\right)$.

Indica razonadamente si la función es creciente o decreciente.

37.- Representar sobre unos mismos ejes de coordenadas la funciones $y = 4^x$ e $y = \log_4 x$, explicar algunas de sus propiedades.

38.-Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$a)\ 2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$ $\quad b)\ 9^{x-1} - 2{\cdot}3^{x-1} = 3$ $\quad c)\ 2^{x^2+1} = 32$

$d)\ 3^{2x} - 2{\cdot}3^{x+1} = 27$ $\quad e)\ 4^{x-1} + 2^x = 6{\cdot}2^{x-1}$ $\quad f)\ 3^{2x^2+3x} = 9$

39.- Resuelve utilizando logaritmos las siguientes ecuaciones exponenciales:

$a)\ 5^{3x-2} = 2$ $\quad b)\ 3^{x-1} + 1 = 8$ $\quad c)\ 7^{x^2+1} = 18$

40.- Representar la siguiente función logarítmica: $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, explicar algunas de sus propiedades.

41.- Calcula, usando la definición de logaritmo:

a) $log_2 256$ b) $log_5 625$ c) $log_2 128$ d) $log_2 \frac{1}{4}$

$e)$ $\log_4 \frac{1}{16}$ $f)$ $\log_7 \frac{1}{343}$ g) $\log_5 \frac{1}{125}$

a) $log_2 512$ b) $log_5 125$ c) $log_2 256$ d) $log_2 0{,}5$

$e)$ $\log_4 \frac{1}{64}$ $f)$ $\log_7 \frac{1}{343}$ g) $\log_5 \frac{1}{25}$ ḥ) $log\, 0{,}001$ **i)** $log_5 0{,}008$

j) $\log 0,001$ **κ)** $\log_7 \sqrt[3]{49}$ l) $\log_5 \sqrt[4]{5}$ m) $\log_3 \sqrt[5]{81}$

42.- Calcula x, usando la definición de logaritmo:

$a)\log_3 \ \ x+5 \ \ = 2$ $b)\log_2 \ \ x^2-1 \ \ = 0$

$c)\log_3 \ \ 2x+3 \ \ = -1$ $d)\ \log \ \ 3x+1 \ \ = 1$

43.- Calcular utilizando la calculadora los siguientes logaritmos:

$a)\log_7 1205$ $b)\log_2 1111$ $c)\log_6 233$ $d)\log_2 415$

$a)\log_7 1021$ $b)\log_2 1024$ $c)\log_5 300$ $d)\log_3 555$

44.- Representar gráficamente la función $y = \frac{3x-1}{x+2}$ hallando para ello:

a) El dominio de la función
b) Asíntota vertical
c) Asíntota horizontal
d) Puntos de corte con los ejes.

45.- Representar gráficamente la función $y = \frac{2x}{x+2}$ hallando para ello:

a) El dominio de la función
b) Asíntota vertical
c) Asíntota horizontal
d) Puntos de corte con los ejes. **(2 puntos)**

46.- Representar gráficamente la función: $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$, calculando para ello:

a) El dominio de la función
b) Asíntota vertical
c) Asíntota horizontal
d) Punto de corte con los ejes.

Ejercicios resueltos
Ejercicio nº 1.-
Resuelve:

a) $\dfrac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\dfrac{3x+4}{3}$ **b)** $x^4-11x^2+28=0$

Solución:

a) $\dfrac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\dfrac{3x+4}{3}$; $\dfrac{4x^2-4x}{3}-\dfrac{3x}{3}=\dfrac{3x^2}{3}-\dfrac{3x+4}{3}$;

$4x^2-4x-3x=3x^2-3x-4$; $x^2-4x+4=0$; $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

b) $x^4-11x^2+28=0$

Cambio: $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$; $z^2-11z+28=0$

$$z=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{11\pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} z=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7} \\ z=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

Cuatro soluciones: $x_1=-\sqrt{7},\quad x_2=\sqrt{7},\quad x_3=-2,\quad x_4=2$

Ejercicio nº 2.-
Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x+\sqrt{3x+10}=6$ **b)** $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{11}{6}$

Solución:

a) $x+\sqrt{3x+10}=6$; $\sqrt{3x+10}=6-x$; $3x+10=(6-x)^2$; $3x+10=36+x^2-12x$

$0=x^2-15x+26$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225-104}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{15\pm 11}{2} \rightarrow \begin{cases} x=13 \\ x=2 \end{cases}$$

Comprobación:

$x=13 \rightarrow 13+\sqrt{49}=13+7=20\neq 6 \rightarrow x=13$ no vale

$x=2 \rightarrow 2+\sqrt{16}=2+4=6 \rightarrow x=2$ sí vale. Hay una solución: x = 2

b) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+4}=\dfrac{11}{6}$; $\dfrac{18(x+4)}{6x(x+4)}+\dfrac{12x}{6x(x+4)}=\dfrac{11x(x+4)}{6x(x+4)}$

$18x+72+12x=11x^2+44x$; $0=11x^2+14x-72$

$$x=\frac{-14\pm\sqrt{196+3168}}{22}=\frac{-14\pm\sqrt{3364}}{22}=\frac{-14\pm 58}{22} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{-72}{22}=\dfrac{-36}{11} \end{cases}$$

Ejercicio nº 3.-

Factoriza y resuelve: $\boldsymbol{x^4+x^3-9x^2-9x=0}$

Solución:

Sacamos factor común:

$x^4+x^3-9x^2-9x=x(x^3+x^2-9x-9)=0$

Factorizamos x^3+x^2-9x-9:

	1	1	−9	−9
−1		−1	0	9
	1	0	−9	0
3		3	9	
	1	3	0	

$$x^4+x^3-9x^2-9x=x(x+1)(x-3)(x+3)=0 \quad \to \quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \quad \to \quad x=-1 \\ x-3=0 \quad \to \quad x=3 \\ x+3=0 \quad \to \quad x=-3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_3=3, \quad x_4=-3$

Ejercicio nº 4.-

Un grupo de amigos tiene que pagar una factura de 500 euros. Si fueran dos amigos más, cada uno de ellos tendría que pagar 12,5 euros menos. ¿Cuántos amigos son?

Solución:

Llamamos x al número de amigos. Cada uno tiene que pagar $\frac{500}{x}$ euros.

Si fueran x + 2 amigos (dos amigos más), cada uno tendría que pagar:

$\frac{500}{x}-12{,}5$ euros (12,5 euros menos)

Como en total son 500 euros, $(x+2)\left(\frac{500}{x}-12{,}5\right)=500$

Resolvemos la ecuación:

$$500-12{,}5x+\frac{1\,000}{x}-25=500 \quad ; \quad -12{,}5x+\frac{1\,000}{x}-25=0$$

$$-12{,}5x^2+1\,000-25x=0 \quad ; \quad 12{,}5x^2+25x-1\,000=0$$

$$x=\frac{-25\pm\sqrt{625+50000}}{25}=\frac{-25\pm\sqrt{50625}}{25}=\frac{-25\pm 225}{25} \quad \to \quad \begin{cases} x=8 \\ x=-10 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

Son, por tanto, 8 amigos.

Ejercicio nº 5.-

Halla la solución del siguiente sistema, analítica y gráficamente: $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3} \\ \boldsymbol{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4} \end{aligned}\right\}$

Solución:

· Resolvemos el sistema analíticamente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{2x}{6}+\frac{3y}{6}=\frac{18}{6} \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{8}{2} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x+3y=18 \\ x+y=8 \end{aligned}\right\} \quad y=8-x$$

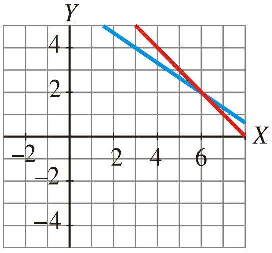
2x +3(8-x) = 18; 2x + 24 -3x = 18; -x = -6

x = 6 ® y = 8 - 6 = 2. *Solución*: x = 6; y = 2

· Interpretación gráfica:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3 \quad &\to \quad y=\frac{18-2x}{3}=6-\frac{2}{3}x=\frac{-2}{3}x+6 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4 \quad &\to \quad y=8-x \end{aligned}\right\}$$

Estas dos rectas se cortan en el punto (6, 2).



Ejercicio nº 6.-

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{2x+y=6} \\ \mathbf{\sqrt{x}-y=-3} \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=6 \\ \sqrt{x}-y=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y=6-2x \\ \sqrt{x}+3=y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 6-2x=\sqrt{x}+3 \\ 3-2x=\sqrt{x} \end{array}$$

$$(3-2x)^2=(\sqrt{x})^2; \quad 9+4x^2-12x=x; \quad 4x^2-13x+9=0$$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{8}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{8}=\frac{13\pm 5}{8} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad \text{no válida} \\ x=1 \quad \rightarrow \quad y=4 \end{cases}$$

$$\left(\text{La solución } x=\frac{9}{4} \text{ no es válida, puesto que } \; 3-2\cdot\frac{9}{4}=-\frac{3}{2}\neq\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\right)$$

La única solución del sistema es x = 1, y = 4.

Ejercicio nº 7.-

Un comerciante compró dos artículos por 30 euros y los vendió por 33,9 euros. En la venta del primer artículo obtuvo un 10% de beneficio y en la venta del segundo artículo ganó un 15%. ¿Cuánto le costó cada uno de los artículos?

Solución:

Llamamos x al precio del primer artículo e y al precio del segundo. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=30 \\ 1{,}1x+1{,}15y=33{,}9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=30-x \\ 1{,}1x+1{,}15(30-x)=33{,}9 \end{array}$$

$$1{,}1x+34{,}5-1{,}15x=33{,}9; \quad -0{,}05x=-0{,}6; \quad x=12$$

$y=30-12=18.$ El primer artículo le costó 12 euros y el segundo, 18.

Ejercicio nº 8.-

Resuelve estas ecuaciones: $\mathbf{a)}\; \boldsymbol{x^2+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+3} \qquad \mathbf{b)}\; \boldsymbol{x^4-21x^2-100=0}$

Solución:

$$\text{a) } x^2+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+3; \qquad \frac{4x^2}{4}+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+\frac{12}{4}; \qquad 4x^2+15=3x^2-x+3+12$$

$$x^2+x=0;$$

$$x(x+1)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \end{cases}$$

$$\text{b) } x^4-21x^2-100=0$$

Cambio $x^2 = z \quad \rightarrow \quad x^4 = z^2$; $\qquad z^2 - 21z - 100 = 0$

$$z = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 400}}{2} = \frac{21 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{21 \pm 29}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = 25 \quad \rightarrow \quad x = \pm 5 \\ \\ z = -4 \quad \text{(no vale)} \end{cases}$$

Dos soluciones: x1 = -5, x2 = 5

Ejercicio nº 9.-

Resuelve estas ecuaciones:

a) $\sqrt{3x + 16} = 2x - 1$ $\qquad$ **b)** $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 1 + \dfrac{4}{x^2}$

Solución:

a) $\sqrt{3x + 16} = 2x - 1$; $\quad 3x + 16 = (2x - 1)^2$; $\quad 3x + 16 = 4x^2 + 1 - 4x$; $\quad 0 = 4x^2 - 7x - 15$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{7 \pm 17}{8} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{-10}{8} = \dfrac{-5}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$x = 3 \quad \rightarrow \quad \sqrt{25} = 5 \quad \rightarrow \quad x = 3$ sí vale.

$x = \dfrac{-5}{4} \rightarrow \sqrt{\dfrac{49}{4}} = \dfrac{7}{2} \neq \dfrac{-7}{2} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{-5}{4}$ no vale.

Hay una solución: x = 3

b) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 1 + \dfrac{4}{x^2}$; $\quad \dfrac{3x}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{4}{x^2}$; $\quad 3x + 2 = x^2 + 4$; $\quad 0 = x^2 - 3x + 2$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 10.-

Resuelve, factorizando previamente:

$\boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0}$

Solución:

Factorizamos:

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0
3		3	6	
	1	2	0	

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \\ x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3 \\ x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2$

Ejercicio nº 11.-

Cristina tiene 8 años más que Carlos, y hace 2 años tenía el doble de edad que él. ¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

Solución:

Llamamos x a la edad que tiene actualmente Carlos y hacemos un cuadro que resuma la información:

	AHORA	HACE 2 AÑOS
CRISTINA	$x+8$	$x+8-2=x+6$
CARLOS	x	$x-2$

La edad de Cristina hace 2 años era el doble que la de Carlos, es decir:

$x+6=2(x-2)$

Resolvemos la ecuación: $x+6=2x-4$; 10 = x

Por tanto, Carlos tiene 10 años y Cristina, 18.

Ejercicio nº 12.-

Resuelve analíticamente el siguiente sistema e interprétalo gráficamente:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{y-4x-2=0}\\ \boldsymbol{y=x^2+3x}\end{array}\right\}$$

Solución:

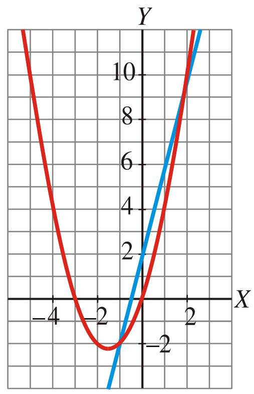
· Lo resolvemos analíticamente:

$$\left.\begin{array}{l}y-4x-2=0\\ y=x^2+3x\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}y=4x+2\\ 4x+2=x^2+3x; \quad 0=x^2-x-2\end{array}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases}x=2 \quad \rightarrow \quad y=10\\ x=-1 \quad \rightarrow y=-2\end{cases}; \quad Solución: \left.\begin{array}{l}x_1=2\\ y_1=10\end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l}x_2=-1\\ y_2=-2\end{array}\right\}$$

· Interpretación gráfica:

$$\left.\begin{array}{l}y=4x+2\\ y=x^2+3x\end{array}\right\}$$ La recta y la parábola se cortan en los puntos $(2,10)$ y $(-1,-2)$.



Ejercicio nº 6.-

Resuelve el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\frac{1}{x+y}=\frac{2}{5}}\\ \boldsymbol{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}}\end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x+y}=\frac{2}{5}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}5=2(x+y)\\ 2y+2x=5xy\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}5=2x+2y\\ 5=5xy \quad \rightarrow \quad 1=xy \quad \rightarrow y=\frac{1}{x}\end{array}$$

$$5 = 2x + \frac{2}{x}; \quad 5x = 2x^2 + 2; \quad 0 = 2x^2 - 5x + 2$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{1}{2} \\ y_2 = 2 \end{array}\right\}$

Ejercicio nº 14.-

Se mezcla cierta cantidad de café de 6 euros/kg con otra cantidad de café de 4 euros/kg, obteniendo 8 kg de mezcla. Sabiendo que el precio del café mezclado es de 4,5 euros/kg, ¿cuántos kilogramos se han mezclado de cada clase?

Solución:

Llamamos x a la cantidad de café (en kg) del primer tipo e y a la cantidad de café (en kg) del segundo tipo. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ 6x + 4y = 4{,}5 \cdot 8 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y = 8 \\ 6x + 4y = 36 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 8 - x \\ 6x + 4(8 - x) = 36 \end{array};$$

$6x + 32 - 4x = 36; \quad 2x = 4; \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = 8 - 2 = 6$ Se han mezclado 2 kg de café de 6 euros/kg con 6 kg de café de 4 euros/kg.

Ejercicio nº 15.-

Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{\dfrac{x^2 - 16}{3} - x = \dfrac{2 - 3x}{3} - \dfrac{x^2}{3}}$ **b)** $\mathbf{x^4 - 5x^2 - 36 = 0}$

Solución:

a) $\dfrac{x^2 - 16}{3} - x = \dfrac{2 - 3x}{3} - \dfrac{x^2}{3}$; $\dfrac{x^2 - 16}{3} - \dfrac{3x}{3} = \dfrac{2 - 3x}{3} - \dfrac{x^2}{3}$; $x^2 - 16 - 3x = 2 - 3x - x^2$

$2x^2 - 18 = 0$; $2x^2 = 18$; $x^2 = 9$

$$x = \pm\sqrt{9} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

b) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Cambio $x^2 = z \quad \rightarrow \quad x^4 = z^2$; $z^2 - 5z - 36 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = 9 \quad \rightarrow \quad x = \pm 3 \\ z = -4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Dos soluciones: x1 = -3, x2 = 3

Ejercicio nº 16.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{\sqrt{3x - 3} + x = 7}$ **b)** $\mathbf{\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{x - 2}{x + 1} = \dfrac{5}{4}}$

Solución:

a) $\sqrt{3x - 3} + x = 7$; $\sqrt{3x - 3} = 7 - x$; $3x - 3 = (7 - x)^2$;

$3x - 3 = 49 + x^2 - 14x$; $0 = x^2 - 17x + 52$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 208}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{17 \pm 9}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 13 \\ x = 4 \end{cases}$$

Comprobación:

$x=13 \quad \rightarrow \quad \sqrt{36}+13=6+13=19\neq 7 \quad \rightarrow \quad x=13$ no vale

$x=4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{9}+4=3+4=7 \quad \rightarrow \quad x=7$ sí vale ; Hay una solución: x = 4

b) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{5}{4}$

$$\frac{8(x+1)}{4(x-1)(x+1)}+\frac{4(x-1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)}=\frac{5(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$$

$8x+8+4(x^2-3x+2)=5(x^2-1)$; $8x+8+4x^2-12x+8=5x^2-5$; $0=x^2+4x-21$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-4\pm 10}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ x=-7 \end{cases}$$

Ejercicio nº 17.-

Descompón en factores y resuelve:

$\boldsymbol{x^4+x^3-4x^2-4x=0}$

Solución:

Sacamos factor común:

$x^4+x^3-4x^2-4x=x(x^3+x^2-4x-4)=0$

Factorizamos x^3+x^2-4x-4:

	1	1	−4	−4
−1		−1	0	4
	1	0	−4	0
2		2	4	
	1	2	0	

$$x^4+x^3-4x^2-4x=x(x+1)(x-2)(x+2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \\ x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=2 \\ x+2=0 \quad \rightarrow \quad x=-2 \end{cases}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son:

$x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_3=2, \quad x_4=-2$

Ejercicio nº 18.-

En un examen tipo test, que constaba de 40 preguntas, era obligatorio responder a todas. Cada pregunta acertada se valoró con un punto, pero cada fallo restaba medio punto. Sabiendo que la puntuación total que obtuvo Pablo fue de 32,5 puntos, ¿cuántas preguntas acertó?

Solución:

Llamamos x al número de preguntas que acertó.

Así: $\left.\begin{array}{l} \text{Acertó} \rightarrow x \\ \text{Falló} \rightarrow 40-x \end{array}\right\}$

Como cada acierto vale un punto, y cada fallo resta medio punto, la puntuación total fue:

$x-0,5(40-x)=32,5$

Resolvemos la ecuación:

$x-20+0,5x=32,5$; $1,5x=52,5$; $x=\dfrac{52,5}{1,5}=35$ Por tanto, acertó 35 preguntas.

Ejercicio nº 19.-

Resuelve analítica y gráficamente este sistema: $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y=x^2-3x} \\ \boldsymbol{y-2x+6=0} \end{array}\right\}$

Solución:

· Lo resolvemos analíticamente:

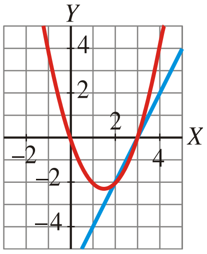
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ y - 2x + 6 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ x^2 - 3x - 2x + 6 = 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array}$$

$$Solución: \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} x_2 = 2 \\ y_2 = -2 \end{array}\right\}$$

;

· Interpretación gráfica:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ y = 2x - 6 \end{array}\right\} \quad \text{La parábola y la recta se cortan en los puntos } (3, 0) \text{ y } (2, -2)$$



Ejercicio nº 20.-

Halla las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 3 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 3 \\ x + y = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4-x} = 3 \\ y = 4 - x \end{array}\right\} \quad \frac{2(4-x)}{x(4-x)} + \frac{3x}{x(4-x)} = \frac{3x(4-x)}{x(4-x)}$$

$$8 - 2x + 3x = 12x - 3x^2; \quad 3x^2 - 11x + 8 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{11 \pm 5}{6} \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{4}{3} \\ x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 3 \end{array}\right.$$

$$\text{Hay dos soluciones: } \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{8}{3} \\ y_1 = \dfrac{4}{3} \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 3 \end{array}\right\}$$

Ejercicio nº 21.-

En una empresa obtienen 6 euros de beneficio por cada envío que hacen; pero si el envío es defectuoso, pierden por él 8 euros. En un día hicieron 2 100 envíos, obteniendo 9 688 euros de beneficio. ¿Cuántos envíos válidos y cuántos defectuosos hicieron ese día?

Solución:

Llamamos x al número de envíos válidos e y al número de envíos defectuosos. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2\,100 \\ 6x - 8y = 9\,688 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 2\,100 - x \\ 6x - 8(2\,100 - x) = 9\,688 \end{array}$$

$$6x - 16\,800 + 8x = 9\,688; \quad 14x = 26\,488; \quad x = 1\,892$$

$$y = 2\,100 - 1\,892 = 208$$

Por tanto, el número de envíos válidos fue de 1 892 y el de envíos defectuosos, 208.

Ejercicio nº 22.-

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x^2}{2} - 4x = 3 + \dfrac{x^2 - 12}{4}$ **b)** $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

Solución:

a) $\frac{x^2}{2} - 4x = 3 + \frac{x^2 - 12}{4}$; $\frac{2x^2}{4} - \frac{16x}{4} = \frac{12}{4} + \frac{x^2 - 12}{4}$; $2x^2 - 16x = 12 + x^2 - 12$

$x^2 - 16x = 0$

$x(x-16) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 16 = 0 \rightarrow x = 16 \end{cases}$

b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

Cambio $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$; $z^2 - 4z + 3 = 0$;

$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ z = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Cuatro soluciones: $x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1$

Ejercicio nº 23.-

Encuentra las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{x + 4 = \sqrt{4x + 12}}$ **b)** $\boldsymbol{\frac{2x - 1}{x} + \frac{4}{x - 1} = \frac{11}{2}}$

Solución:

a) $x + 4 = \sqrt{4x + 12}$; $(x + 4)^2 = 4x + 12$; $x^2 + 16 + 8x = 4x + 12$; $x^2 + 4x + 4 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

Comprobación:

$x = -2 \rightarrow 2 = \sqrt{4} \rightarrow$ sí es válida

b) $\frac{2x - 1}{x} + \frac{4}{x - 1} = \frac{11}{2}$; $\frac{2(2x-1)(x-1)}{2x(x-1)} + \frac{8x}{2x(x-1)} = \frac{11x(x-1)}{2x(x-1)}$

$2(2x^2 - 3x + 1) + 8x = 11x^2 - 11x$; $4x^2 - 6x + 2 + 8x = 11x^2 - 11x$; $0 = 7x^2 - 13x - 2$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 56}}{14} = \frac{13 \pm \sqrt{225}}{14} = \frac{13 \pm 15}{14} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-2}{14} = \frac{-1}{7} \end{cases}$

Ejercicio nº 24.-

Resuelve esta ecuación:

$\boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0}$

Solución:

Factorizamos:

	1	−2	−11	12
1		1	−1	−12
	1	−1	−12	0
4		4	12	
	1	3	0	

$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x-1)(x-4)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x - 4 = 0 \rightarrow x = 4 \\ x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = 1,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = -3$

Ejercicio nº 25.-

Un padre ha comprado un jersey para cada uno de sus cinco hijos, gastándose en total 108,75 euros. Tres de los jerseys tenían un 15% de descuento, y otro de ellos tenía un 20% de descuento. Sabiendo que inicialmente costaban lo mismo, ¿cuánto ha tenido que pagar por cada jersey?

Solución:

Llamamos x a lo que costaba cada jersey antes de los descuentos.

Los que tienen un 15% de descuento valdrán ahora 0,85x.

El que está rebajado un 20% costará 0,8x.

Por tanto, el total que ha pagado es:

$3 \cdot 0{,}85x + 0{,}8x + x = 108{,}75;$ $\quad 2{,}55x + 0{,}8x + x = 108{,}75;$ $\quad 4{,}35x = 108{,}75$

$$x = \frac{108{,}75}{4{,}35} = 25 \text{ euros}$$

Por el que no tiene descuento ha pagado 25 euros. El que tiene un 20% de descuento cuesta ahora 20 euros. Por cada uno de los tres que tenían rebaja de un 15% ha tenido que pagar 21,25 euros.

Ejercicio nº 26.-

Resuelve el sistema de ecuaciones:

Solución:

· Resolvemos analíticamente el sistema: $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{y = x^2 - 2x} \\ \boldsymbol{y + x - 6 = 0} \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 2x \\ y + x - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &y = x^2 - 2x \\ &x^2 - 2x + x - 6 = 0; \quad x^2 - x - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 3 \\ x = -2 \rightarrow y = 8 \end{cases}; \quad Solución: \left.\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ y_1 &= 3 \end{aligned}\right\} \text{ y } \left.\begin{aligned} x_2 &= -2 \\ y_2 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº 28.-

La suma de dos números es 12 y la de sus inversos es $\frac{3}{8}$. ¿Cuales son esos números?

Solución:

Llamamos x e y a los números que buscamos.

Así:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{3}{8} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= 12 \\ 8y + 8x &= 3xy \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &y = 12 - x \\ &8(12 - x) + 8x = 3x(12 - x) \end{aligned}$$

$$96 - 8x + 8x = 36x - 3x^2; \quad 3x^2 - 36x + 96 = 0$$

$$x^2 - 12x + 32 = 0; \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 8 \rightarrow y = 4 \\ x = 4 \rightarrow y = 8 \end{cases}$$

Los números son el 4 y el 8.

Ejercicio nº 29.-

Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\boldsymbol{x(x + 4) - 5 = \frac{x(x - 1)}{3}}$ $\qquad$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 48x^2 - 49 = 0}$

Solución:

a) $x(x + 4) - 5 = \frac{x(x - 1)}{3};$ $\quad x^2 + 4x - 5 = \frac{x^2 - x}{3};$ $\quad 3x^2 + 12x - 15 = x^2 - x;$ $\quad 2x^2 + 13x - 15 = 0$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{4} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{4} = \frac{-13 \pm 17}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-30}{4} = \frac{-15}{2} \end{cases}$$

b) $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

$$z = \frac{48 \pm \sqrt{2304 + 196}}{2} = \frac{48 \pm \sqrt{2500}}{2} = \frac{48 \pm 50}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 49 \rightarrow x = \\ z = -1 \text{ (no vale} \end{cases}$$

Cambio $x^2 = z \rightarrow x^4 = z^2$; $z^2 - 48z - 49 = 0$

Dos soluciones: x1 = -7, x2 = 7

Ejercicio nº 30.-

Resuelve:

a) $\sqrt{x+5} - x = 3$ **b)** $\frac{4x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{14}{3}$

Solución:

a) $\sqrt{x+5} - x = 3$; $\sqrt{x+5} = 3 + x$; $x + 5 = 9 + x^2 + 6x$; $0 = x^2 + 5x + 4$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Comprobación:

$x = -1 \rightarrow \sqrt{4} + 1 = 2 + 1 = 3 \rightarrow x = -1$ sí vale

$x = -4 \rightarrow \sqrt{1} + 4 = 1 + 4 = 5 \neq 3 \rightarrow x = -4$ no vale

Hay una solución: x = -1

b) $\frac{4x}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{14}{3}$; $\frac{12x(x-2)}{3(x+2)(x-2)} + \frac{3x(x+2)}{3(x+2)(x-2)} = \frac{14(x+2)(x-2)}{3(x+2)(x-2)}$

$12x^2 - 24x + 3x^2 + 6x = 14(x^2 - 4)$; $15x^2 - 18x = 14x^2 - 56$; $x^2 - 18x + 56 = 0$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{324-224}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{18 \pm 10}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ejercicio nº 31.-

Resuelve la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0}$

Solución:

Factorizamos:

	1	4	-1	-4
1		1	5	4
	1	5	4	0
-1		-1	-4	
	1	4	0	

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x-1)(x+1)(x+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \\ x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -4$

Ejercicio nº 32.-

Averigua un número sabiendo que la suma del doble de su inverso más el triple de dicho número da como resultado $\frac{25}{2}$.

Solución:

Llamamos x al número buscado y planteamos la ecuación: $\frac{2}{x} + 3x = \frac{25}{2}$; $4 + 6x^2 = 25x$;

$6x^2 - 25x + 4 = 0$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625-96}}{12} = \frac{25 \pm \sqrt{529}}{12} = \frac{25 \pm 23}{12} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Hay dos soluciones 4 y $\frac{1}{6}$

Ejercicio nº 33.-

Resuelve analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones e interpreta gráficamente la solución:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y}{2}=2\\ 3x+y=7\end{array}\right\}$$

Solución:

· Resolvemos analíticamente el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y}{2}=2\\ 3x+y=7\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{2x-2}{6}+\dfrac{3y}{6}=\dfrac{12}{6}\\ 3x+y=7\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}2x-2+3y=12\\ 3x+y=7\end{array}\right\}$$

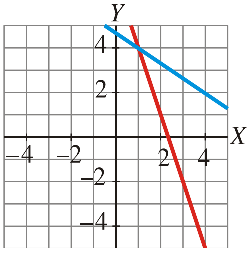
$$\left.\begin{array}{l}2x+3y=14\\ 3x+y=7\end{array}\right\} \quad y=7-3x; \quad 2x+3(7-3x)=14$$

$$2x+21-9x=14; \quad 2x-9x=14-21; \quad -7x=-7; \quad x=1; \quad y=7-3\cdot 1=7-3=4$$

Solución: x = 1; y = 4

· Interpretación gráfica:

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y=14 \quad \rightarrow \quad y=\dfrac{14-2x}{3}\\ 3x+y=7 \quad \rightarrow \quad y=7-3x\end{array}\right\} \text{ Estas dos rectas se cortan en el punto } (1,\ 4).$$



Ejercicio nº 34.-

Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{y}=0\\ 2x-y=3\end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{y}=0\\ 2x-y=3\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}3y-x^2=0\\ 2x-y=3\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}y=\dfrac{x^2}{3}\\ 2x-\dfrac{x^2}{3}=3; \quad 6x-x^2=9\end{array}$$

$$0=x^2-6x+9; \quad x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad \rightarrow \quad y=3$$

Solución: x = 3; y = 3

Ejercicio nº 35.-

Alberto compró 3 bolígrafos y 2 cuadernos, pagando en total 2,9 euros. Una semana después, los bolígrafos tenían un 20% de descuento y los cuadernos, un 15%. Si los hubiera comprado con estas rebajas, habría tenido que pagar 2,42 euros. ¿Cuánto le costó a Alberto cada bolígrafo y cuánto cada cuaderno?

Solución:

Llamamos x al precio de cada bolígrafo e y al precio de cada cuaderno, antes de la rebaja.

Así:

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y=2{,}9\\ 0{,}8\cdot 3x+0{,}85\cdot 2y=2{,}42\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}3x+2y=2{,}9\\ 2{,}4x+1{,}7y=2{,}42\end{array}\right\} \quad y=\frac{2{,}9-3x}{2}$$

$$2{,}4x+1{,}7\left(\frac{2{,}9-3x}{2}\right)=2{,}42; \quad 2{,}4x+\frac{4{,}93-5{,}1x}{2}=2{,}42$$

$$4{,}8x+4{,}93-5{,}1x=4{,}84; \quad -0{,}3x=-0{,}09; \quad x=0{,}3 \quad \rightarrow \quad y=1$$

Antes de la rebaja, cada bolígrafo costaba 0,3 euros y cada cuaderno, 1 euro.

Ejercicio nº 36.-

Resuelve:

a) $\dfrac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\dfrac{3x+4}{3}$ **b)** $x^4-11x^2+28=0$

Solución:

a) $\dfrac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\dfrac{3x+4}{3}$; $\dfrac{4x^2-4x}{3}-\dfrac{3x}{3}=\dfrac{3x^2}{3}-\dfrac{3x+4}{3}$

$4x^2-4x-3x=3x^2-3x-4$; $x^2-4x+4=0$; $x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

b) $x^4-11x^2+28=0$

Cambio: $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$; $z^2-11z+28=0$

$$z=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{11\pm3}{2}\rightarrow\begin{cases}z=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7}\\ z=4 \rightarrow x=\pm2\end{cases}$$

Cuatro soluciones: $x_1=-\sqrt{7},\quad x_2=\sqrt{7},\quad x_3=-2,\quad x_4=2$

Ejercicio nº 37.-

Resuelve:

a) $\sqrt{x+5}-x=3$ **b)** $\dfrac{4x}{x+2}+\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{14}{3}$

Solución:

a) $\sqrt{x+5}-x=3$; $\sqrt{x+5}=3+x$; $x+5=9+x^2+6x$; $0=x^2+5x+4$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}\rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=-4\end{cases}$$

Comprobación:

$x=-1 \rightarrow \sqrt{4}+1=2+1=3 \rightarrow x=-1$ sí vale

$x=-4 \rightarrow \sqrt{1}+4=1+4=5\neq3 \rightarrow x=-4$ no vale; Hay una solución: x = -1

b) $\dfrac{4x}{x+2}+\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{14}{3}$; $\dfrac{12x(x-2)}{3(x+2)(x-2)}+\dfrac{3x(x+2)}{3(x+2)(x-2)}=\dfrac{14(x+2)(x-2)}{3(x+2)(x-2)}$

$12x^2-24x+3x^2+6x=14(x^2-4)$; $15x^2-18x=14x^2-56$; $x^2-18x+56=0$

$$x=\frac{18\pm\sqrt{324-224}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{18\pm10}{2}\rightarrow\begin{cases}x=14\\ x=4\end{cases}$$

Ejercicio nº 38.-

Descompón en factores y resuelve: $\boldsymbol{x^4+x^3-4x^2-4x=0}$

Solución:

Sacamos factor común: $x^4+x^3-4x^2-4x=x(x^3+x^2-4x-4)=0$

Factorizamos x^3+x^2-4x-4:

	1	1	−4	−4
−1		−1	0	4
	1	0	−4	0
2		2	4	
	1	2	0	

$$x^4+x^3-4x^2-4x = x(x+1)(x-2)(x+2)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \\ x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=2 \\ x+2=0 \quad \rightarrow \quad x=-2 \end{cases}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x_1=0, \quad x_2=-1, \quad x_3=2, \quad x_4=-2$

Ejercicio nº 39.-

Un padre ha comprado un jersey para cada uno de sus cinco hijos, gastándose en total 108,75 euros. Tres de los jerseys tenían un 15% de descuento, y otro de ellos tenía un 20% de descuento. Sabiendo que inicialmente costaban lo mismo, ¿cuánto ha tenido que pagar por cada jersey?

Solución:

Llamamos x a lo que costaba cada jersey antes de los descuentos.

Los que tienen un 15% de descuento valdrán ahora 0,85x.

El que está rebajado un 20% costará 0,8x.

Por tanto, el total que ha pagado es:

3 · 0,85x + 0,8x + x = 108,75; 2,55x +0,8x + x =108,75; 4,35x = 108,75

$$x = \frac{108,75}{4,35} = 25 \text{ euros}$$

Por el que no tiene descuento ha pagado 25 euros. El que tiene un 20% de descuento cuesta ahora 20 euros. Por cada uno de los tres que tenían rebaja de un 15% ha tenido que pagar 21,25 euros.

Ejercicio nº 40.-

Resuelve analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones e interpreta gráficamente la solución:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{x-1}}{\mathbf{3}} + \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{7} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

· Resolvemos analíticamente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = 2 \\ 3x+y=7 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \frac{2x-2}{6} + \frac{3y}{6} = \frac{12}{6} \\ 3x+y=7 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x-2+3y=12 \\ 3x+y=7 \end{aligned}\right\}$$

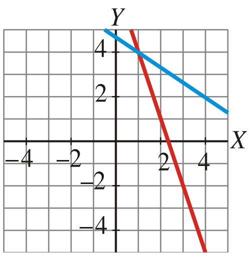
$$\left.\begin{aligned} 2x+3y=14 \\ 3x+y=7 \end{aligned}\right\} \quad y=7-3x; \quad 2x+3(7-3x)=14$$

$$2x+21-9x=14; \quad 2x-9x=14-21; \quad -7x=-7; \quad x=1; \quad y=7-3\cdot 1=7-3=4$$

*Solució*n: x = 1; y = 4

· Interpretación gráfica:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y=14 \quad &\rightarrow \quad y=\frac{14-2x}{3} \\ 3x+y=7 \quad &\rightarrow \quad y=7-3x \end{aligned}\right\}$$ Estas dos rectas se cortan en el punto (1, 4).



Ejercicio nº 41.-

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{6} \\ \sqrt{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y} = -\mathbf{3} \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=6 \\ \sqrt{x}-y=-3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y=6-2x \\ \sqrt{x}+3=y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 6-2x=\sqrt{x}+3 \\ 3-2x=\sqrt{x} \end{array}$$

$$(3-2x)^2=(\sqrt{x})^2; \quad 9+4x^2-12x=x; \quad 4x^2-13x+9=0$$

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{8}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{8}=\frac{13\pm 5}{8} \quad \to \quad \begin{cases} x=\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \quad \to \quad \text{no válida} \\ x=1 \quad \to \quad y=4 \end{cases}$$

$$\left(\text{La solución } x=\frac{9}{4} \text{ no es válida, puesto que } 3-2\cdot\frac{9}{4}=-\frac{3}{2}\neq\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\right)$$

La única solución del sistema es x = 1, y = 4.

Ejercicio nº 42.-

Alberto compró 3 bolígrafos y 2 cuadernos, pagando en total 2,9 euros. Una semana después, los bolígrafos tenían un 20% de descuento y los cuadernos, un 15%. Si los hubiera comprado con estas rebajas, habría tenido que pagar 2,42 euros. ¿Cuánto le costó a Alberto cada bolígrafo y cuánto cada cuaderno?

Solución:

Llamamos x al precio de cada bolígrafo e y al precio de cada cuaderno, antes de la rebaja.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=2,9 \\ 0,8\cdot 3x+0,85\cdot 2y=2,42 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x+2y=2,9 \\ 2,4x+1,7y=2,42 \end{array}\right\} \quad y=\frac{2,9-3x}{2}$$

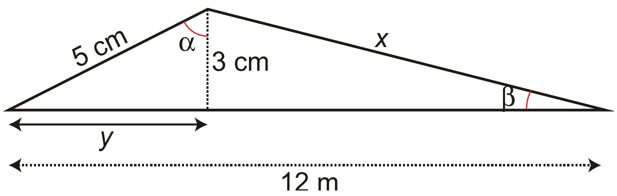
$$2,4x+1,7\left(\frac{2,9-3x}{2}\right)=2,42; \quad 2,4x+\frac{4,93-5,1x}{2}=2,42; \quad 4,8x+4,93-5,1x=4,84$$

$$-0,3x=-0,09; \quad x=0,3 \quad \to \quad y=1$$

Antes de la rebaja, cada bolígrafo costaba 0,3 euros y cada cuaderno, 1 euro.

Trigonometría

1) a) Calcula x e y en el triángulo:



b) Halla el seno, el coseno y la tangente de los ángulos α y β.

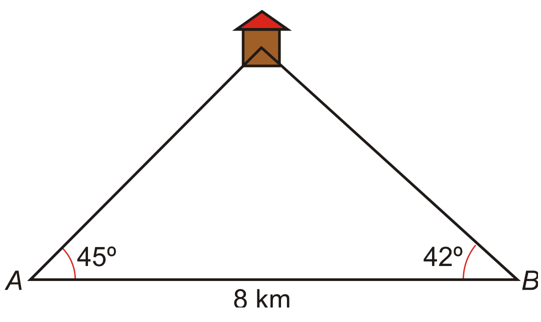
2)

Calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$ sabiendo que la $tg\,\alpha = -\sqrt{5}$ y $\alpha \in 2^{o}$ cuadrante. Expresa la solución con radicales.

3) Carlos sube por una rampa de 35 m hasta el tejado de su casa. Estando ahí, mide el ángulo que forma la visual entre su casa y la rampa, resultando ser de 70°. Calcula la altura de la casa de Carlos y el ángulo que hay entre la rampa y el suelo.

4) Se quiere medir la altura de una estatua colocada en el centro de un lago circular. Para ello, se mide el ángulo que forma la visual al extremo superior de la estatua desde el borde del lago con la horizontal y resulta ser de 50°; nos alejamos 45 dm y volvemos a medir, obteniendo un ángulo de 35°. Averigua la altura de la estatua y la superficie del lago.

5) Dos ambulancias, distanciadas 8 km en línea recta, reciben una llamada de urgencia de una casa. Observa la figura y calcula la distancia que separa a cada ambulancia de la casa:



6) Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.

a) Si $tg\,\alpha > 0$ entonces α está en el 1er cuadrante exclusivamente.

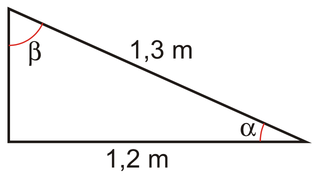
b) Si $sen\,\alpha < 0$ y $tg\,\alpha > 0$ entonces $cos\,\alpha < 0$.

c) Las razones trigonométricas del ángulo $-\alpha$ coinciden con las del ángulo $360 - \alpha$.

d) Si *sen* $\alpha < 0$, α puede estar en el 2º o 3er cuadrante.

7) La base de un triángulo isósceles mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de 40°. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

8) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo siguiente:



Solución:

Llamamos x a la longitud del otro cateto y calculamos su valor usando el teorema de Pitágoras:

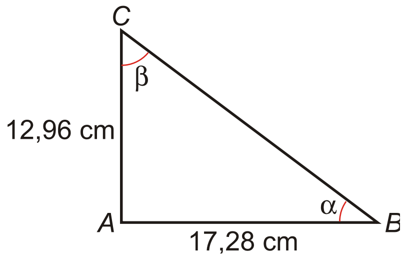
$x^2 + 1{,}2^2 = 1{,}3^2 \rightarrow x^2 + 1{,}44 = 1{,}69 \rightarrow x^2 = 0{,}25 \rightarrow x = 0{,}5$ m

Calculamos las razones trigonométricas de α y β:

$$sen\ \alpha = \frac{0{,}5}{1{,}3} \approx 0{,}38 \qquad cos\ \alpha = \frac{1{,}2}{1{,}3} \approx 0{,}92 \qquad tg\ \alpha = \frac{0{,}5}{1{,}2} \approx 0{,}42$$

$$sen\ \beta = \frac{1{,}2}{1{,}3} \approx 0{,}92 \qquad cos\ \beta = \frac{0{,}5}{1{,}3} \approx 0{,}38 \qquad tg\ \beta = \frac{1{,}2}{0{,}5} \approx 2{,}4$$

9) Halla las razones trigonométricas de los ángulos α y β del triángulo *ABC* sabiendo que es rectángulo.



Solución:

Sea x la longitud de la hipotenusa; por el teorema de Pitágoras:

$12,96^2 + 17,28^2 = x^2 \;\rightarrow\; x^2 = 466,56 \;\rightarrow\; x = 21,6$ cm

Calculamos las razones trigonométricas de α y β:

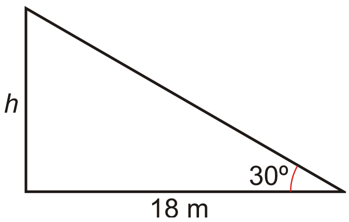
$$sen\ \alpha = \frac{12,96}{21,6} = 0,6 \qquad cos\ \alpha = \frac{17,28}{21,6} = 0,8 \qquad tg\ \alpha = \frac{12,96}{17,28} = 0,75$$

$$sen\ \beta = \frac{17,28}{21,6} = 0,8 \qquad cos\ \beta = \frac{12,96}{21,6} = 0,6 \qquad tg\ \beta = \frac{17,28}{12,96} = 1,\overset{\frown}{3}$$

10) Halla la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 18 m se ve la parte superior de la antena bajo un ángulo de 30°.

Solución:

Llamamos h a la altura de la antena.



Como datos tenemos un ángulo y el cateto contiguo; nos piden el cateto opuesto al ángulo, luego la tangente será la razón trigonométrica a usar:

$$tg\ 30° = \frac{h}{18} \;\rightarrow\; h = 18 \cdot tg\ 30° = 18\frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \approx 10,39 \text{ m}$$

La altura de la antena es de 10,39 m.

11)

Si $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $90° < \alpha < 180°$, ¿Cuánto valen $cos\alpha$ y $tg\alpha$?

Solución:

Si $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \;\rightarrow\; \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \;\rightarrow\; \frac{5}{9} + cos^2\ \alpha = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos^2\ \alpha = 1 - \frac{5}{9} \;\rightarrow\; cos^2\ \alpha = \frac{4}{9} \;\rightarrow\; cos\ \alpha = -\frac{2}{3}$ donde elegimos el signo $-$ por ser $90° < \alpha < 180°$.

$$\text{Así, } tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \rightarrow \quad tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

12) Sin usar calculadora, completa la siguiente tabla $(0° \leq \alpha \leq 90°)$:

Solución:

α	$90°$	**$60°$**	$0°$	$45°$
sen α	1	$\sqrt{3}/2$	0	$\boldsymbol{\sqrt{2}/2}$
cos α	0	1/2	**1**	$\sqrt{2}/2$
tg α	**NO EXISTE**	$\sqrt{3}$	0	1

13) Un tronco de 6,2 m está apoyado en una pared y forma con el suelo un ángulo de 55°.

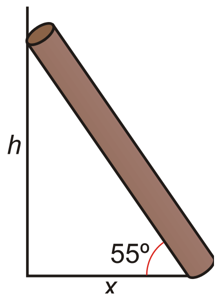
a) ¿A qué altura de la pared se encuentra apoyado?

b) Calcula la distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.

Solución:

$h \rightarrow$ altura que alcanza el tronco apoyado en la pared.

$x \rightarrow$ distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.



La hipotenusa del triángulo que se forma mide 6,2 m, y un ángulo agudo, 55°.

Así:

a) $sen\ 55° = \dfrac{h}{6{,}2} \quad \rightarrow \quad h = 6{,}2 \cdot sen\ 55° \approx 6{,}2 \cdot 0{,}82 = 5{,}08 \text{ m}$

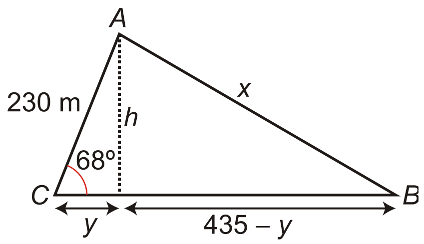
El tronco se encuentra apoyado en la pared a 5,08 m del suelo.

b) $cos\ 55° = \dfrac{x}{6{,}2} \quad \rightarrow \quad x = 6{,}2 \cdot cos\ 55° \approx 6{,}2 \cdot 0{,}57 = 3{,}53 \text{ m}$

La distancia entre el extremo inferior del tronco y la pared es de 3,53 m.

14) El ángulo que se forma en la intersección de dos caminos es de 68°. La granja *A* está a 230 m de ese punto, y la granja *B*, a 435 m. ¿A qué distancia en línea recta está la granja *A* de la granja *B*?

Solución:



Llamamos x a la distancia en línea recta entre la granja A y la B.

Por no ser rectángulo el triángulo ABC, trazamos la altura h que lo divide en dos triángulos rectángulos: AHC y AHB.

En el triángulo AHC conocemos $\hat{C} = 68°$ y $\overline{AC} = 230$, podemos calcular h e y:

$$\cos 68° = \frac{y}{230} \rightarrow y = 230 \cdot \cos 68° = 230 \cdot 0{,}37 = 85{,}1 \text{ m}$$

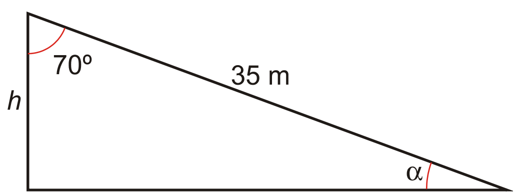
$$\operatorname{sen} 68° = \frac{h}{230} \rightarrow h = 230 \cdot \operatorname{sen} 68° = 230 \cdot 0{,}93 = 213{,}9 \text{ m}$$

En el triángulo AHB, ahora conocemos $h = 213{,}9$ m y $435 - y = 435 - 85{,}1 = 349{,}9$ m.

Podemos calcular x usando el teorema de Pitágoras:

15) Carlos sube por una rampa de 35 m hasta el tejado de su casa. Estando ahí, mide el ángulo que forma la visual entre su casa y la rampa, resultando ser de 70°. Calcula la altura de la casa de Carlos y el ángulo que hay entre la rampa y el suelo.

Solución:



Llamamos h a la altura de la casa y α al ángulo que hay entre la rampa y el suelo.

Calculamos α: $90° + 70° + \alpha = 180° \rightarrow \alpha = 20°$

Calculamos h: $cos\ 70° = \dfrac{h}{35} \rightarrow h = 35 \cdot cos\ 70° \approx 35 \cdot 0{,}34$

$h = 11{,}9$ m es la altura de la casa de Carlos.

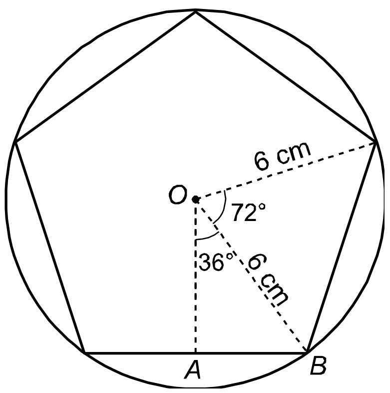
$$x^2 = h^2 + (435 - y)^2 \rightarrow x^2 = (213{,}9)^2 + (349{,}9)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \sqrt{45753{,}21 + 122430{,}01} = \sqrt{168183{,}22} \approx 410{,}1 \text{ m}$$

La distancia entre ambas granjas es de 410,1 m.

16) Halla el lado, la apotema y el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

Solución:

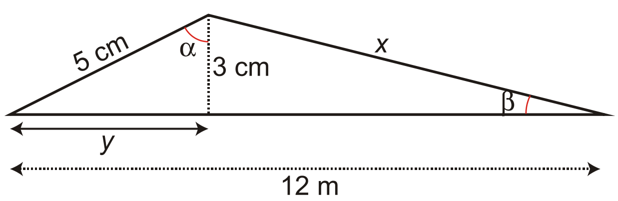


El ángulo central del pentágono vale $\dfrac{360°}{5} = 72°$.

Por tanto, el ángulo $\widehat{AOB}$ del triángulo rectángulo de la figura vale $\dfrac{72°}{2} = 36°$.

La apotema es la longitud $\overline{OA} = 6 \cdot cos 36° \approx 4{,}85$ cm.

17) a) Calcula x e y en el triángulo:



b) Halla el seno, el coseno y la tangente de los ángulos α y β.

Solución:

a) Calculamos y aplicando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = 3^2 + y^2 \rightarrow 25 = 9 + y^2 \rightarrow 16 = y^2 \rightarrow y = 4$ cm

Calculamos x sabiendo que la longitud de los catetos del triángulo BDC miden 3 cm y

$12 - 4 = 8$ cm:

$x^2 = 3^2 + 8^2 \rightarrow x^2 = 9 + 64 \rightarrow x^2 = 73 \rightarrow x \approx 8{,}54$ cm

b) Calculamos las razones trigonométricas de α y β:

$$sen\ \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad cos\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad tg\ \alpha = \frac{4}{3} = 1{,}\overset{\frown}{3}$$

$$sen\ \beta = \frac{3}{8{,}54} = 0.351 \qquad cos\ \beta = \frac{8}{8.54} = 0.936 \qquad tg\ \beta = \frac{3}{8} = 0.375$$

18)

Calcula *sen* α y *cos* α sabiendo que la *tg* $\alpha = -\sqrt{5}$ y $\alpha \in 2^{o}$ cuadrante. Expresa la solución con radicales.

Solución:

Como $tg\ \alpha = -\sqrt{5} \rightarrow tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$(-\sqrt{5})^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow 6 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{6} \rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, por estar α en el 2º cuadrante.

Así, $sen\ \alpha = -\sqrt{5}\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

19)

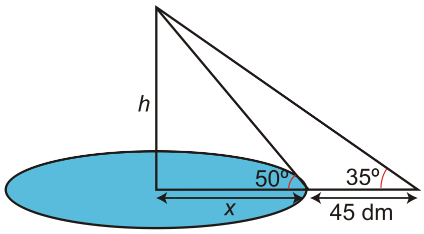
Se quiere medir la altura de una estatua colocada en el centro de un lago circular. Para ello, se mide el ángulo que forma la visual al extremo superior de la estatua desde el borde del lago con la horizontal y resulta ser de 50°; nos alejamos 45 dm y volvemos a medir, obteniendo un ángulo de 35°. Averigua la altura de la estatua y la superficie del lago.

Solución:

Hacemos una representación. Llamamos:

$h \rightarrow$ altura de la estatua

$x \;\rightarrow\;$ radio del lago



$$\left.\begin{array}{lll} tg\ 50° = \dfrac{h}{x} & \rightarrow & h = x \cdot tg\ 50° \\ tg\ 35° = \dfrac{h}{x+45} & \rightarrow & h = (x+45)\cdot tg\ 35° \end{array}\right\} \rightarrow \quad x \cdot tg\ 50° = (x+45)\cdot tg\ 35° \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x \cdot 1{,}19 = (x+45)\cdot 0{,}7 \quad \rightarrow \quad 1{,}19x = 0{,}7x + 31{,}5 \quad \rightarrow \quad 0{,}49x = 31{,}5 \quad \rightarrow \quad x = 64{,}29 \text{ dm}$$

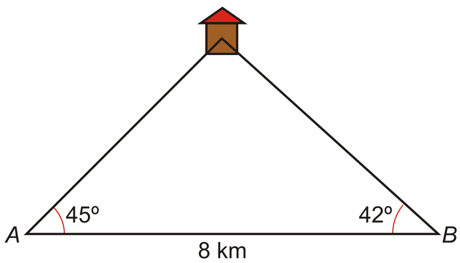
Luego $h = 64{,}29 \cdot 1{,}19 = 76{,}51$ dm $= 7{,}65$ m

Calculamos la superficie del lago circular:

$$A_{\text{CIRCULO}} = \pi \cdot x^2 \approx 3{,}14 \cdot (64{,}29)^2 \approx 12978{,}26 \text{ dm}^2 \approx 129{,}78 \text{ m}^2$$

La superficie del lago es de 129,78 m^2.

20) Dos ambulancias, distanciadas 8 km en línea recta, reciben una llamada de urgencia de una casa. Observa la figura y calcula la distancia que separa a cada ambulancia de la casa:



Solución:

Trazando la altura desde la casa al lado AB, conseguimos dos triángulos rectángulos:

Del dibujo deducimos:

$$\left.\begin{array}{ll} tg\ 45° = \dfrac{h}{x} & \rightarrow\ h = x \cdot tg\ 45° \\ tg\ 42° = \dfrac{h}{8-x} & \rightarrow\ h = (8-x)\cdot tg\ 42° \end{array}\right\} \rightarrow\ x\ tg\ 45° = (8-x)tg\ 42° \ \rightarrow\ x = (8-x)0{,}9 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x = 7{,}2 - 0{,}9x \ \rightarrow\ 1{,}9x = 7{,}2 \ \rightarrow\ x = 3{,}79 \text{ km}, \quad \text{luego} \quad h = 3{,}79 \text{ km}$$

De este modo hemos calculado el valor de los catetos en ambos triángulos rectángulos. Aplicando el teorema de Pitágoras, obtendremos la hipotenusa en cada caso:

$$b = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{2 \cdot (3{,}79)^2} = 3{,}79\sqrt{2} \approx 5{,}36 \text{ km}$$

$$a = \sqrt{h^2 + (8-x)^2} = \sqrt{3{,}79^2 + 4{,}21^2} \approx 5{,}66 \text{ km}$$

La ambulancia *A* está a 5,36 km de la casa, y la ambulancia *B,* a 5,66 km.

También podríamos haber hallado a y b mediante razones trigonométricas.

21) Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Razona la respuesta.

a) Si *tg* α > 0 entonces α está en el 1^er^ cuadrante exclusivamente.

b) Si *sen* α < 0 y *tg* α > 0 entonces *cos* α < 0.

c) Las razones trigonométricas del ángulo $-\alpha$ coinciden con las del ángulo 360 – α.

d) Si *sen* α < 0, α puede estar en el 2º o 3^er^ cuadrante.

Solución:

a) FALSO.

Además del 1^er^ cuadrante, α también puede estar en el 3º ya que en ese cuadrante,

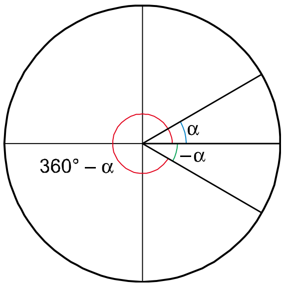
sen α < 0 y *cos* α < 0, luego *tg* α > 0.

b) VERDADERO.

Para que *tg* α > 0, *sen* α y *cos* α han de tener el mismo signo. Luego si *sen* α < 0 entonces *cos* α < 0.

c) VERDADERO.

El ángulo $-\alpha$ está situado por debajo del eje *X* tal como indica el dibujo. Sus razones trigonométricas coincidirán con las de 360° – α.

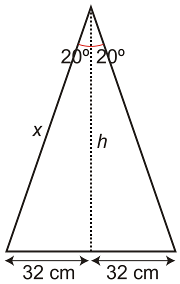


d) FALSO,

α puede estar en el 3er o 4º cuadrante.
α

22) La base de un triángulo isósceles mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de 40°. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

Solución:



Trazamos la altura sobre la base para conseguir dos triángulos rectángulos.

Para calcular el perímetro y el área, necesitamos conocer el valor de la altura, *h*, y del otro lado, *x*.

En cada triángulo conocemos el ángulo de 20° y el cateto opuesto a este ángulo que mide

$$\frac{64}{2} = 32 \text{ cm.}$$

$$sen\ 20° = \frac{32}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{32}{sen\ 20°} \approx \frac{32}{0{,}34} = 94{,}12 \text{ cm}$$

$$cos\ 20° = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad cos\ 20° = \frac{h}{94{,}12} \quad \rightarrow \quad h = 94{,}12 \cdot cos\ 20° \quad \rightarrow \quad h \approx 94{,}12 \cdot 0{,}94 \approx 88{,}47 \text{ cm}$$

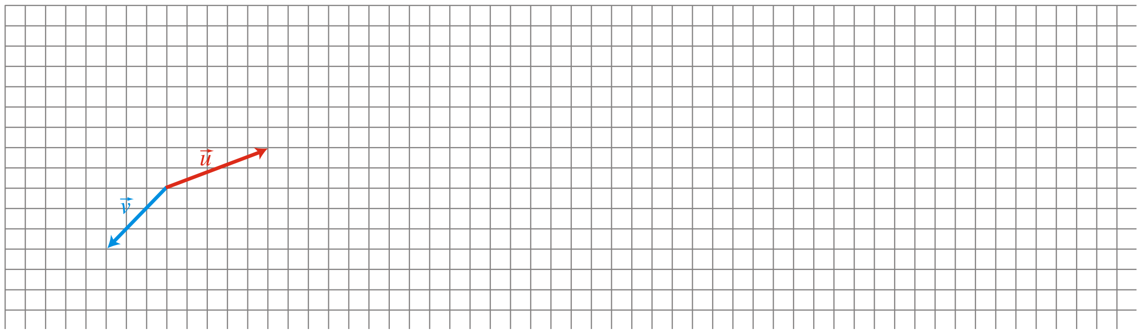
Luego:

Perímetro = 64 + 2 · 94,12 = 252,24 cm

$$\text{Área} = \frac{64 \cdot 88{,}47}{2} = 2831{,}04 \text{ cm}^2$$

Ejercicio nº 1.-

a) Dibuja los vectores $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{u}+3\vec{v}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los que muestra la figura:



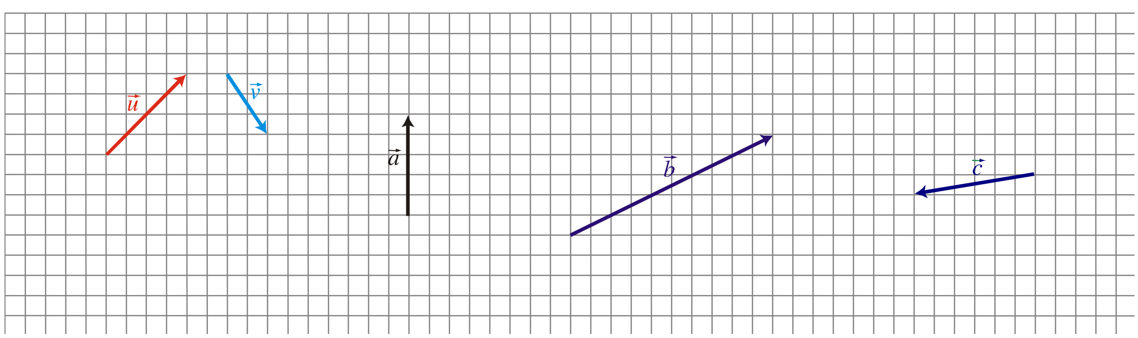
b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{2}{3},\ -1\right)$ y $\vec{b}(3,-2)$, obtén las coordenadas de:

$$-3\vec{a}+2\vec{b};\quad 2\vec{a}-\vec{b};\quad \vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

Ejercicio nº 2.-

a) Expresa el vector $\vec{x}\,(4,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{y}\,(2,-3)$ y $\vec{z}\left(\frac{1}{2},1\right)$.

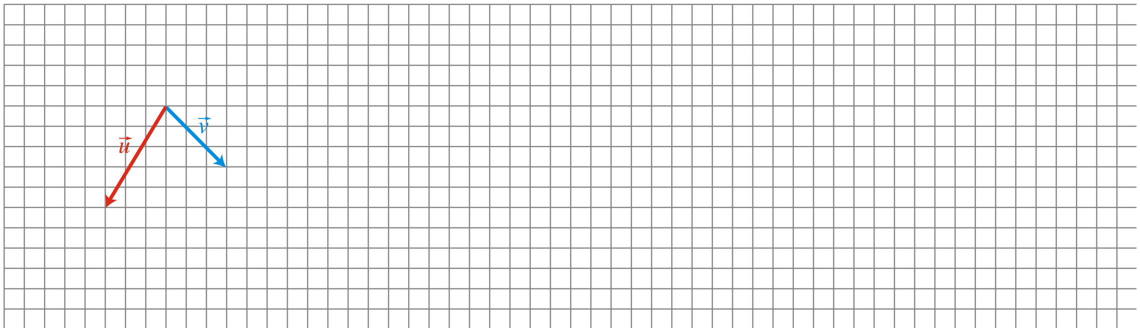
b) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



Ejercicio nº 1.-

a) A la vista de la siguiente figura, dibuja los vectores:

$$-\vec{u}+2\vec{v};\quad \vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v};\quad \vec{u}-2\vec{v}$$



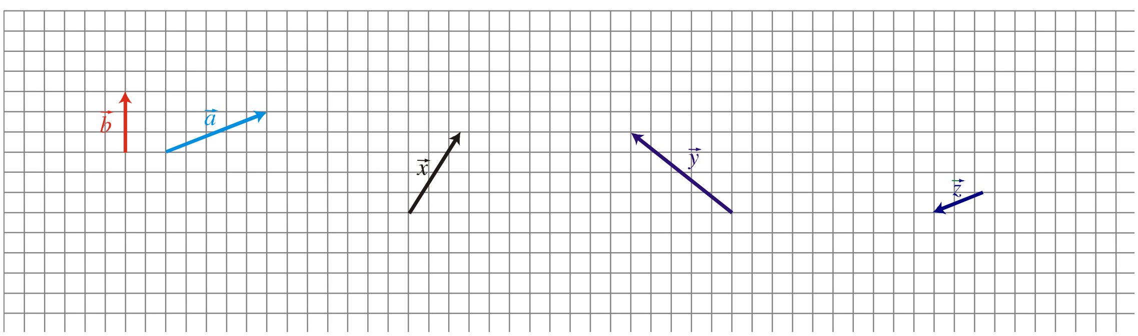
b) Dados los vectores $\vec{a}\left(\frac{-3}{4},\ 2\right)$ **y** $\vec{b}\,(2,\ -2)$, **obtén las coordenadas de:**

$$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b};\quad -2\vec{a}+\vec{b};\quad -4\vec{a}+\vec{b}$$

Ejercicio nº 2.-

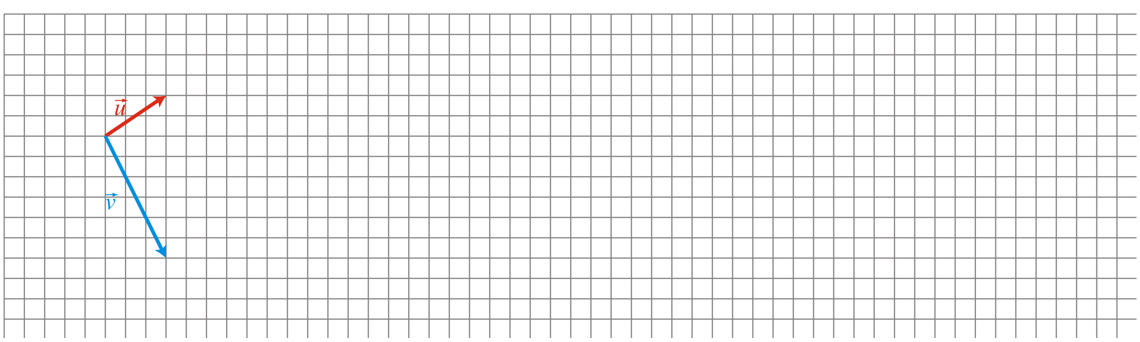
a) Halla las coordenadas del vector $\vec{u}\,(-2,-3)$ **con respecto a la base formada por los vectores** $\vec{v}\left(2,-\frac{1}{3}\right)$ **y** $\vec{w}\,(1,-1)$

b) Expresa los vectores $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ **como combinación lineal de los vectores** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$**:**



Ejercicio nº 1.-

a) Si $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$ **son los siguientes vectores, dibuja** $2\vec{u}-\vec{v},\ -\vec{u}+\vec{v}$ **y** $-\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$**.**



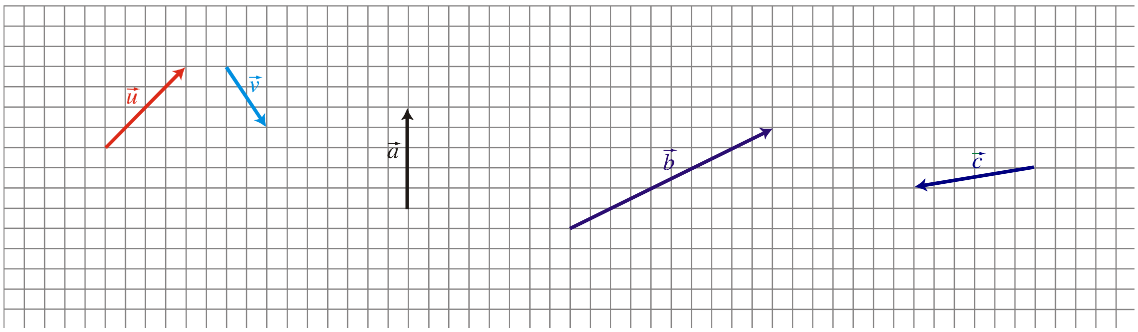
b) Las coordenadas de dos vectores son $\vec{a}(2,\ -3)$ **y** $\vec{b}\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$. **Obtén las coordenadas de:**

$$-3\vec{a}+2\vec{b};\quad -\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};\quad \frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

Ejercicio nº 2.-

a) Expresa el vector $\vec{x}\,(4,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{y}\,(2,-3)$ y $\vec{z}\left(\frac{1}{2},1\right)$.

b) Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



Ejercicio nº 1.-

Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

a) Halla el punto medio del segmento de extremos A y B.

b) Halla el simétrico de B con respecto a C.

Ejercicio nº 2.-

El punto medio del segmento AB es $M(2, -1)$. Halla las coordenadas de A, sabiendo que $B(-3, 2)$.

Ejercicio nº 3.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(2, -1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

Ejercicio nº 4.-

Averigua la posición relativa de las rectas (si se cortan, averigua en qué punto):

$$r:\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -2 + t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 5.-

Halla el ángulo que forman las rectas:

$$r:\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -1 - 6t \end{cases}$$

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r:\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

Ejercicio nº 7.-

¿Cuál ha de ser el valor de k para que estas dos rectas sean paralelas?

$$x + 3y - 2 = 0 \qquad kx + 2y + 3 = 0$$

Ejercicio nº 8.-

Halla la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta:

$$r:\begin{cases} x=-3+2t \\ y=1+4t \end{cases}$$

Ejercicio nº 9.-

Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(3, -4)$ respecto a la recta $r: -3x + y + 2 = 0$.

Ejercicio nº 1.-

Considera los puntos $A(-1, 3)$, $B(2, 6)$ y $C(x, y)$. Halla los valores de x e y para que C sea:

a) El punto medio del segmento de extremos A y B.
b) El simétrico de A con respecto a B.

Ejercicio nº 2.-

Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(1, 3)$.

Ejercicio nº 3.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, 4)$.

Ejercicio nº 4.-

Dadas las rectas:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-1-3t \\ y=2+6t \end{cases}$$

averigua su posición relativa. Si se cortan, di cuál es el punto de corte:

Ejercicio nº 5.-

Averigua el ángulo formado por las rectas:

$$r:\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-1+3t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=-2-t \\ y=-1+2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 6.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos $P(3, -1)$ y $Q(2, -4)$.

Ejercicio nº 7.-

Halla la ecuación implícita de la recta perpendicular a $2x + y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(1, 1)$.

Ejercicio nº 8.-

Dados los puntos $P(3, 2)$ y $Q(-2, 4)$, y la recta r: $2x + y - 3 = 0$; calcula la distancia:

a) Entre P y Q.
b) De P a r.

Ejercicio nº 1.-

a) Halla el punto medio del segmento de extremos $P(3, -2)$ y $Q(-1, 5)$.
b) Halla el simétrico del punto $P(3, -2)$ con respecto a $Q(-1, 5)$.

Ejercicio nº 2.-

Dados los puntos $A(2, -3)$, $B(-1, 4)$ y $C(x, 3)$, determina el valor de x para que

A, B y C estén alineados.

Ejercicio nº 3.-

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a $2x - y + 3 = 0$ y que pasa por el punto $P(4, 3)$.

Ejercicio nº 4.-

Determina la posición relativa de estas rectas. Si se cortan, di en qué punto:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \qquad x: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$$

Ejercicio nº 5.-

Averigua si estas dos rectas son perpendiculares. Si no lo fueran, halla el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 6t \end{cases}$$

Ejercicio nº 6.-

Averigua la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto $P(2, -2)$ y cuya pendiente es $m = -3$.

Ejercicio nº 7.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-1, 2)$ y es paralela a $3x - y + 4 = 0$.

Ejercicio nº 8.-

Halla la distancia de P a Q y de P a r, siendo:

$P(-1, -1)$, $Q(2, -3)$ y r: $3x - y + 6 = 0$

Ejercicio nº 9.-

Halla el área del paralelogramo de vértices $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(4, 4)$ y $D(0, 3)$.

Ejercicio nº 1.-

a) Averigua el punto simétrico de $A(5, -1)$ con respecto a $B(4, -2)$.

b) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(4, -2)$.

Ejercicio nº 2.-

Averigua las coordenadas del punto P, que divide al segmento de extremos $A(2, -4)$ y $B(1, 3)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$.

Ejercicio nº 3.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 3)$ y $Q(-2, 8)$.

Ejercicio nº 4.-

Determina la posición relativa de las siguientes rectas. Si se cortan, averigua en qué punto:

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - t \end{cases}$$

Ejercicio nº 5.-

Determina el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

Ejercicio nº 6.-

Escribe la ecuación implícita de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto $P(-1, 4)$.

Ejercicio nº 7.-

Halla el valor de k para que las rectas

$$2x - 3y + 4 = 0 \qquad -3x + ky - 1 = 0$$

sean perpendiculares.

Ejercicio nº 8.-

Calcula la distancia del punto $P(-3, 5)$ a la recta $r: y = 2x - 3$.

Ejercicio nº 1.-

a) Halla el punto medio del segmento cuyos extremos son $A(2, -5)$ con respecto al punto $B(-3, 2)$.

b) Halla el simétrico de $A(2, -5)$ con respecto al punto $C(1, -4)$.

Ejercicio nº 2.-

Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(2, -3)$, $B(4, 1)$ y $C(-1, 2)$.

Ejercicio nº 3.-

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1)$ y es paralela a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + t \end{cases}$$

Ejercicio nº 4.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 + 4t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -2 - 8t \end{cases}$$

averigua su posición relativa (si se cortan, di en qué punto).

Ejercicio nº 5.-

Dadas las rectas r y s, determina el ángulo que forman:

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + 4t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases}$$

Ejercicio nº 6.-

Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por $P(-2, 5)$ y es paralela al vector $\vec{v}(-1, 3)$.

Ejercicio nº 7.-

Dadas las rectas:

$$r: -4x + y - 3 = 0 \qquad s: kx - y + 1 = 0$$

halla el valor de k para que r y s sean perpendiculares.

Ejercicio nº 1.-

Dados los puntos $A(2, -1)$, $B(-3, 4)$ y $C(0, -8)$:

a) Halla el punto medio del segmento de extremos *A* y *B*.
b) Halla el simétrico de *B* con respecto a *C*.

__Ejercicio nº 2.-__
El punto medio del segmento *AB* es *M*(2, −1). Halla las coordenadas de *A*, sabiendo que *B*(−3, 2).

__Ejercicio nº 3.-__
Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos *P*(−1, 3) y *Q*(−2, 8).

__Ejercicio nº 4.-__
Determina la posición relativa de las siguientes rectas. Si se cortan, averigua en qué punto:

$$r: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 - t \end{cases}$$

__Ejercicio nº 5.-__
Determina el ángulo que forman las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

__Ejercicio nº 6.-__
Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por *P*(−2, 5) y es paralela al vector $\vec{v}(-1, 3)$.

__Ejercicio nº 7.-__
¿Cuál ha de ser el valor de *k* para que estas dos rectas sean paralelas?

$$x + 3y - 2 = 0 \qquad kx + 2y + 3 = 0$$

__Ejercicio nº 8.-__
Halla la distancia del punto *P*(2, −1) a la recta:

$$r: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$